MỤC LỤC

LỜI GIỚI THIỆU

Trong thời đại phát triển công nghệ như hiện này, bộ môn toán được coi là một môn học nền tảng, với mục đích: giúp học sinh có những kiến thức, kỷ năng học toán cần thiết để áp dụng vào cuộc sống hàng ngày và học các môn học khác; phát triển tư duy toán học và kỹ năng giải quyết vấn đề; sử dụng hiệu qủa các công cụ Toán học; phát triển khả năng suy luận hợp lý; tạo điều kiện cho người học có thể giải quyết và đáp ứng sự biến đổi nhanh chóng của xã hội hiện đại công nghệ 4.0.

Việc tính toán với các con số luôn luôn được thực hiện theo một quy trình chặt chẽ, giảm thiểu các sai số và cho kết quả đáng tin cậy. Hỗ trợ tính toán và xử lý các dữ liệu là một phần không thể thiếu ở năng lực của Sinh viên học ngành công nghệ thông tin. Việc vận dụng kiến thức toán để giải quyết các vấn đề thực tiễn trong tin học ứng và quả trị hệ thống mạng máy tính là điều rất cần và thiết thực cho Sinh viên học ngành công nghệ.

Với mục đích đó, chúng tôi biên soạn cuốn Giáo trình Toán ứng dụng cho Sinh viên hệ Cao đẳng các ngành Công nghệ thông tin học tập, với kiến thức học trong hai chương thời lượng từ 30 đến 45 tiết. Trong đó, Chương 1 Sinh viên được học về: tập hợp và số phức, ánh xạ và hàm số, các giá trị lượng giác và đồ thị hàm số lượng giác, vận dụng định thức của ma trận vuông để giải hệ phương trình tuyến tính và ứng dụng; Chương 2 Sinh viên được học kiến thức về các hệ đếm: hệ đếm thập phân, hệ đếm nhị phân, hệ đếm bát phân, hệ đếm số thập lục phân, nắm được cách chuyển đổi giữa các hệ đếm, các kiến thức về logic mệnh đề, khái niệm về thuật toán và ứng dụng của thuật toán,... Vận dụng kiến thức này ứng dụng vào giải quyết một số vấn đề liên quan đến ngành công nghệ thông tin.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu Nhà trường, Phòng Đào tạo, Khoa Cơ bản trường Cao đẳng nghề KTCN Việt Nam - Hàn Quốc đã tạo điều kiện giúp đỡ để chúng tôi hoàn thiện giáo trình.

Hy vọng rằng Giáo trình này sẽ giúp các bạn Sinh viên học tập tốt môn Toán, yêu thích môn Toán và say mê tìm tòi các vấn đề toán học áp dụng trong ngành công nghệ thông tin.

Quá trình viết giáo trình không tránh được sự sai sót, nhóm tác giả rất mong nhận được sự góp ý của độc giả để cuốn giáo trình hoàn thiện hơn trong lần tái bản sau.

Xin chân thành cảm ơn !

Nghệ An, ngày 30 tháng 08 năm 2023.

Chủ biên

TS. Nguyễn Đức Thành

CHƯƠNG 1: TẬP HỢP VÀ SỐ PHỨC, ÁNH XẠ VÀ HÀM SỐ, GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC HÀM SỐ, MA TRẬN VÀ ỨNG DỤNG

1. Mục tiêu: Sinh viên hiểu được một số khai niệm và tính chất cơ bản về tập hợp, tập hợp số và số phức, biết vận dụng để giải toán trên tập số phức; Nắm được khái niệm về ánh xạ và các tính chất của nó, từ đó đưa ra được khái niệm về hàm số được định nghĩa qua ánh xạ, biết được các hình dạng về đồ thị của hàm số sơ cấp cơ bản, đồ thị của các hàm số lượng giác và hàm số ngược của nó; Biết tính giới hạn của các hàm số và xét tính liên tục của hàm số một biến số; Nắm được một số công thức lượng giác và tính được một số giá trị đặc biệt của lượng giác; Hiểu được thế nào là ma trận, các loại ma trận và tính chất của nó. Biết cách tính định thức của ma trận vuông, từ đó vận dụng kiến thức định thức về ma trận để giải hệ phương trình tuyến tính,... Từ đó vận dụng một số kiến thức này giải thích một số vấn đề trong tin học ứng dụng và quản trị mạng máy tính.

2. Nội dung chương: Trong chương này, Sinh viên được học về: tập hợp và số phức, ánh xạ và hàm số, giới hạn và tính liên tục của hàm số một biến số, các giá trị lượng giác, ma trận, ứng dụng định thức để giải hệ phương trình tuyến tính.

BÀI 1: TẬP HỢP VÀ SỐ PHỨC

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ TÍNH CHẤT VỀ TẬP HỢP

1.1.1. Tập hợp và phần tử của tập hợp

Tập hợp là một khái niệm nguyên thuỷ, không được định nghĩa cũng như những khái niệm điểm, đường, mặt. Ta thường nói tập hợp sinh viên của một lớp, tập hợp các điểm trong một đường tròn,… Như vậy tập hợp bao gồm các đối tượng có cùng một tính chất nào đó. Mỗi đối tượng trong tập hợp gọi là phần tử của tập hợp.

Nếu x là phần tử của tập A, ta ký hiệu: $x \in A$ (đọc là "x thuộc A"). Nếu y không phải là phần tử của tập hợp A, ta ký hiệu: $y \notin A$ (đọc là "y không thuộc A").

Ví dụ 1.1. Các tập hợp $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ là tập các số tự nhiên.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ là tập các số nguyên.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ là tập các số hữu tỉ.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{$*vô tỷ*$\}$ là tập các số thực.

1.1.2. Tập hợp con, tập rỗng, tập bằng nhau

Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng (*tập trống*), ký hiệu là $\emptyset$.

- Cho hai tập hợp A và B. Ta gọi A là tập hợp con của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, ký hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.
- Ta quy ước: Tập $\emptyset$ là tập con của mọi tập hợp.
- Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, ký hiệu $A = B$.

1.1.3. Các phép toán trên tập hợp

a) *Phép hợp*

- Hợp của hai tập A và B là tập hợp gồm những phần tử thuộc tập A, hoặc tập hợp B, ký hiệu $A \cup B$.

Hình 1.1

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ hoặc $x \in B\}$ (*hình 1.1*).

• Phép hợp có các tính chất sau:

- Tính kết hợp: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Tính giao hoán: $A \cup B = B \cup A$.

Ví dụ 1.2. Cho các tập hợp $A = \{0, 1\}$; $B = \{2, 3, 4\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) *Phép giao*

• Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm những phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B, ký hiệu $A \cap B$, xác định: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ và $x \in B\}$ (*hình 1.2*).

A B

Hình 1.2

• Phép giao các tập hợp có các tính chất sau:

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cap B = B \cap A$

c) *Phép trừ, phần bù*

• Hiệu của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp gồm những phần tử thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập B, ký hiệu $A \backslash B$, xác định:

$A \backslash B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ (*hình 1.3*).

A B

Hình 1.3

• Cho tập $A \subset X$. Tập hợp bù của $A \subset X$ là tập hợp $X \backslash A$, ký hiệu $\overline{A}$, xác định:

$\overline{A} = X \setminus A = \{x \in X, x \notin A\}$ (*hình 1.4*).

X

A

Hình 1.4

Ví dụ 1.3. Cho $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$

$B = \{x \mid x^2 + 4x - 5 = 0\} = \{-5, 1\}$

Khi đó: $A \cup B = \{-5, 1, 2\}$; $A \cap B = \{1\}$

$A \backslash B = \{2\}$; $(A \cup B) \backslash A = \{-5\}$.

d) *Tích Đề các của hai tập hợp*

Tích Đề-các của hai tập hợp A và B là tập hợp tất cả các cặp (a, b), $a \in A$, $b \in B$, ký hiệu AxB, xác định: Ax$B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Ví dụ 1.4. Nếu $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 5\}$ thì Ax$B = \{(1, 3); (1, 5); (2, 3), (2, 5)\}$

1.2. SỐ PHỨC

1.2.1. Sự mở rộng của tập hợp số

Ta biết rằng trong tập hợp số thực thì có những phương trình đại số như phương trình $x^2 + 1 = 0$ hay $x^2 = -1$ vô nghiệm vì bình phương mọi số thực đều không âm. Do đó cần phải mở rộng tập hợp số sao cho mọi phương trình đại số đều có nghiệm. Đó chính là tập hợp số phức.

1.2.2. Các khái niệm

• ***Tập số ảo:*** Số i thoả mãn điều kiện $i^2 = -1$ được gọi là đơn vị ảo.

Số thuần ảo là những số có dạng: bi, với $b \in R$, $i^2 = -1$.

Tập số ảo được xây dựng và ký hiệu như sau: $I = \{bi \setminus b \in R,\ i^2 = -1\}$.

Ví dụ 1.5. Các số $2i,\ 5i,\ -3i,\ -\dfrac{1}{2}i,\ \sqrt{3}i$ đều thuộc tập số ảo.

- ***Tập số phức:*** Ta gọi số phức là những số có dạng $a + bi$, với a, b là các số thực, i là đơn vị ảo. Tập số phức là tập hợp bao gồm tất cả các số phức, được ký hiệu và xác định như sau: $\mathbb{C} = \{z : z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Người ta thường dùng các chữ cái như *w*, *u*, *v*, *z*... để kí hiệu các số phức.

Nhận xét: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ví dụ 1.6. Các số $z_1 = 1 - 2i;\ z_2 = 5 + \sqrt{2}i;\ z_3 = 0 - 7i = -7i$ đều là những số phức.

- ***Dạng đại số của số phức:*** Số phức *z* được biểu diễn dưới dạng $z = a + bi$ được gọi là dạng đại số của số phức, trong đó *a* là phần thực của *z*, ký hiệu là $\mathrm{Re}z$, *b* là phần ảo của *z*, ký hiệu là $\mathrm{Im}\,z$.

Vậy số phức *z* được xem là tổng đại số của một số thực và một số ảo, nghĩa là: $z = a + bi = \mathrm{Re}\,z + i.\mathrm{Im}\,z.$

Ví dụ 1.7. Biểu diễn số phức $\sqrt{4 - 3i}$ dưới dạng đại số.

Theo định nghĩa ta cần tìm số phức ω sao cho $\omega^2 = 4 - 3i$.

Nếu $\omega = a + bi,\ a, b \in R$ thì $4 - 3i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$

Từ đó, ta có: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = -3. \end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $\begin{cases} a = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ b = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ và $\begin{cases} a = -\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

Vậy số $\sqrt{4 - 3i}$ có dạng đại số là: $\omega_{1,2} = \pm\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

- ***Hai số phức bằng nhau:*** Hai số phức: $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$.

- ***Số phức liên hợp:*** Số phức $\bar{z} = a - bi$ được gọi là liên hợp với số phức $z = a + bi$.
- ***Số phức đối:*** Nếu $z = a + ib$ thì $-a - ib$ gọi là số phức đối của *z*, kí hiệu $-z$.

Ví dụ 1.7. Cho $z = 2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 3i$; $-z = -2 - 3i$.

- ***Số phức nghịch đảo:*** số phức nghịch đảo của $z = a + bi,\ z \neq 0$ là số mà tích với *z* thì bằng 1, kí hiệu là $\dfrac{1}{z}$, hay z^{-1}. Nếu $z = a + bi,\ z \neq 0$ thì

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Ví dụ 1.8. Cho $z = 1 + 2i$. Khi đó $z^{-1} = \dfrac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{1-2i}{1^2+2^2} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i.$

1.2.3. Phép toán về số phức

a) ***Phép cộng:*** Cho hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$. Người ta gọi tổng của hai số phức z_1 và z_2 là số phức, kí hiệu $z_1 + z_2$. Xác định: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2)+(b_1 + b_2)i$.

Phép cộng có các tính chất sau:

+ Tính kết hợp: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 +(z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3$

+ Tính giao hoán: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

+ Tồn tại phần tử trung hòa: $z + 0 = 0 + z = z$. Trong đó 0 là số phức "không" $a = 0$, $b = 0$.

+ Tồn tại phần tử đối $-z$ của z sao cho $z + (-z) = 0$. Trong đó $-z$ là số số phức đối của z.

b) ***Phép trừ:*** Cho hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$. Người ta gọi hiệu của hai số phức z_1 và z_2 là một số phức, kí hiệu $z_1 - z_2$. Xác định: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2)+ (b_1 - b_2)i$.

Ví dụ 1.9. Cho $z_1 = 3 - 4i$; $z_2 = 1 + 2i$

Khi đó, ta có: $z_1 + z_2 = (3 + 1) + (-4 + 2)i = 4 - 2i.$

$z_1 - z_2 = (3 - 4i) + (-1 - 2i) = 2 - 6i.$

c) ***Phép nhân:*** Tính của hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$ là một số phức, được thực hiện như nhân hai nhị thức thông thường với chú ý $i^2 = -1$, kí hiệu: z_1z_2, xác định: $z_1z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$

$= a_1a_2 + ia_2b_1 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2$

$= a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 + b_1a_2).$

Phép nhân số phức có các tính chất sau:

+ Tính kết hợp: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) = z_1z_2z_3$.

+ Tính giao hoán: $z_1z_2 = z_2z_1$.

+ Tồn tại phần tử đơn vị ký hiệu là 1 sao cho $z.1 = 1.z = z$, trong đó 1 là số phức có phần thực là 1 phần ảo là 0.

+ Nếu $z = a + ib \neq 0$ thì tồn tại phần tử nghịch đảo $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} =$ $\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$ là số phức nghịch đảo của số phức z sao cho $z.z^{-1}=1$.

d) ***Phép chia:*** Cho hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$ với $z_2 \neq 0$. Ta gọi thương của z_1, z_2 ký hiệu là $\dfrac{z_1}{z_2}$ được thực hiện như sau:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a^2+b^2} - \frac{a_1b_2+b_1a_2}{a^2+b^2}i.$$

Ví dụ 1.10. Cho $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 1 + 3i$.

Khi đó: $z_1z_2 = (2 - 3i)(1 + 3i) = 11 + 3i$

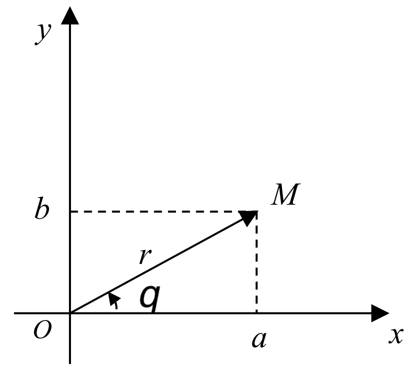
$$\frac{z}{z_2} = \frac{2-3i}{1+3i} = \frac{(2-3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{7}{10} + \frac{9}{10}i = \frac{1}{10}(7+9i).$$

Dễ thấy rằng đối với các phép toán trên, các phép toán trên số thực là một trường hợp riêng của số phức.

1.2.4. Dạng lượng giác của số phức

a) *Mặt phẳng phức*

Ta xét hệ trục toạ độ vuông góc Oxy và đặt tương ứng số phức $z = a + ib$ với điểm $M(a, b)$ trong mặt phẳng đó (*hình 1.5*).



Hình 1.5

Hoành độ của điểm M bằng phần thực còn tung độ M bằng phần ảo, của số phức z.

Do đó Ox gọi là trục thực, Oy là trục ảo và mặt phẳng Oxy gọi là mặt phẳng phức.

b) *Argumen và mô đun của số phức*

Cho số phức $z = a + bi$, có điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức Oxy là $M(a,b)$. Người ta gọi khoảng cách r từ M đến O là mô-đun của z, ký hiệu là $|z|$ và xác định:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Góc hợp bởi chiều dương trục thực và $\overrightarrow{OM}$ được gọi là arcgumen của số $z \neq 0$, ký hiệu là $Arg(z)$. Đối với số phức $z = 0$ arcgumen được xác định tùy ý. Khác với mô-đun, arcgumen của số phức xác định không đơn trị, nó xác định với sự sai khác một số hạng bội nguyên của 2π, và $Arg(z) = \varphi + 2k\pi$, $k \in Z$, (*hình 1.5*) trong đó $\varphi = \arg(z)$ là *giá trị chính* của acgumen được xác định bởi điều kiện:

$$-\pi < \arg(z) \le \pi \text{ hoặc } 0 \le \arg(z) < 2\pi.$$

Phần thực và phần ảo của số phức $z = a + bi$ được biểu diễn qua mô-đun và arcgumen của nó như sau: $\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi. \end{cases}$

Như vậy, arcgumen φ của số phức có thể tìm từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Hay $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$ và $\sin\varphi$ cùng dấu với b.

Chú ý 1: Khi tìm φ ta chọn góc φ sao cho $\sin\varphi$ cùng dấu với b.

c) *Dạng lượng giác của số phức*

Giả sử M là ảnh của số phức z trong mặt phẳng phức. Đặt $r = OM$; $\theta = (Ox, \overrightarrow{OM})$, r gọi là mô đun của z, θ là góc định hướng mà vectơ $\overrightarrow{OM}$ hợp với Ox, được gọi là agumen của z. Khi đó r và θ được xác định trong mục b).

Do đó, số phức $z = a + ib$ có thể viết được dưới dạng: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ gọi là dạng lượng giác của số phức z.

Vậy $z = a + ib \Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, với $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$.

Chú ý 2: - Trong khoảng $(0;2\pi)$ có hai góc θ_1, θ_2 thỏa mãn: $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, nên ta chọn θ là một trong hai góc đó sao cho $\sin\theta$ cùng dấu với b.

- Argumen của $z = 0$ được xem như có giá trị bất kỳ.

Ví dụ 1.11. Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Ta có $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, do đó: $r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$.

$$\text{tg}\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \theta = \dfrac{\pi}{3} \\ \theta = \dfrac{4\pi}{3} \end{array}\right. \text{ với } \theta \in (0;2\pi).$$

Vì $\sin\dfrac{\pi}{3} > 0$ cùng dấu với $b = \sqrt{3}$ nên ta chọn $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Do đó, dạng lượng giác của số phức z là: $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 1.12. Cho số phức $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Ta có $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$. Vậy $r = 2$; với $\text{tg}\theta = -\sqrt{3}$ ta có: $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ hoặc $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$, $\theta \in (0;2\pi)$.

Vì $\sin\dfrac{7\pi}{6} < 0$ cùng dấu với $b = -\sqrt{3} < 0$ nên ta chọn $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$. Do đó, dạng lượng giác của số phức z là: $z = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

d) *Lũy thừa với số mũ nguyên dương của số phức ở dạng lượng giác*

Cho số phức $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, khi đó ta có:

$$z^2 = z.z = r^2(\cos2\theta + i\sin2\theta)$$
$$z^3 = z^2.z = r^3(\cos3\theta + i\sin3\theta)$$

Tổng quát: $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, công thức này được gọi là công thức Moivre.

Ví dụ 1.13. Cho số phức $z = 1 - \sqrt{3}\,i$. Tính z^n, z^{12}?

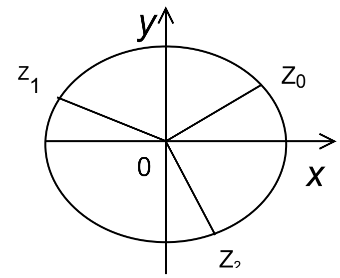
Giải: Dạng lượng giác của số phức z là: $z = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$ (*ví dụ 1.12*)

Do đó: $z^n = 2^n(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})^n$

$= 2^n(\cos\frac{7\pi}{6}n + i\sin\frac{7\pi}{6}n$

$z^{12} = 2^{12}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})^{12}$

$= 2^{12}(\cos\frac{7\pi}{6}.12 + i\sin\frac{7\pi}{6}.12) = 2^{12}(\cos 14\pi + i\sin 14\pi) = 2^{12}$.



Hình 1.6

e) *Khai căn bậc n (n nguyên dương) của số phức*

Ta gọi căn bậc n ($n \in \mathbb{N}_+$) của số phức z là một số phức mà khi nâng lên luỹ thừa bậc n thì bằng z, kí hiệu là: $\sqrt[n]{z}$, $(\sqrt[n]{z})^n = z$.

Giả sử $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ và $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Khi đó ta có: $r(\cos\theta + i\sin\theta) = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n$

$= \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\varphi = \theta + k2\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ hay $\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \dfrac{\theta + k2\pi}{n}, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Cho $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ ta được n giá trị khác nhau của φ. Vậy ta xác định được căn bậc n của z là: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + k2\pi}{n})$, với $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Ví dụ 1.14. Tính $\sqrt[3]{1}$

Giải: Ta có: $1 = 1.(\cos 0 + i\sin 0)$.

$\Rightarrow \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{0 + k2\pi}{3} + i\sin\frac{0 + k2\pi}{3}) = \cos\frac{k2\pi}{3} + i\sin\frac{k2\pi}{3}$, với $k = 0, 1, 2$.

Cho các giá trị $k = 0, 1, 2$ ta được: $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}i$.

$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}i$.

Ví dụ 1.15. Cho $z = -1 + \sqrt{3}i$. Hãy chuyển z sang dạng lượng giác, tính z^5 và tính $\sqrt[3]{z}$.

Giải: Dạng lượng giác của z là: $z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. Do đó, ta có:

$$z^5 = 2^5[\cos(5\frac{2\pi}{3}) + i\sin(5\frac{2\pi}{3})] = 32(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}) = 32(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}).$$

Khai căn bậc 3 số phức z: $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}(\cos\dfrac{\frac{2\pi}{3} + k2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{2\pi}{3} + k2\pi}{3})$, với $k = 0, 1, 2$.

+ Với $k = 0$, ta có: $z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$.

+ Với $k = 1$, ta có :

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right).$$

+ Với $k = 2$, ta có:

$$z_2 = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

Các số phức z_0, z_1, z_2 có cùng mô đun là $\sqrt[3]{2}$, nhưng argumen của chúng sai khác nhau một lượng là $\frac{2\pi}{3}$, các điểm biểu diễn tương ứng với chúng trên mặt phẳng phức tạo thành các đỉnh của một tam giác đều (*hình 1.6*).

BÀI TẬP

1. Cho $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Hãy viết tất cả các phần tử của các tập sau: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$.

2. Cho các bất phương trình.

a) $|2x + 3| \geq 1$ b) $(x - 2)^2 \geq 4$

c) $x^2 + 2x - 8 \leq 0$ d) $|x^2 + 7x - 12| \leq x^2 + 7x - 12$.

Giả sử gọi tập nghiệm của bất phương trình câu a) là A; tập nghiệm của bất phương trình câu b) là B; tập nghiệm của bất phương trình câu c) là C; tập nghiệm của bất phương trình câu d) là D. Hãy xác định: $A \cup B$; $A \cap C$; $B \cap D$; $B \backslash C$; $D \backslash A$.

3. Giải phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $x^2 - (1 + \sqrt{3}i)x - 1 + \sqrt{3}i = 0$;

b) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$.

4. Giải các phương trình, hệ phương trình sau.

a) $|z| - z = 1 + 2i$; b) $|z| + z = 2 + i$; c) $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$;

d) $3z^2 - iz + 1 = 0$; e) $z^2 - 2z + 3 = 0$; f) $z^2 + z - 2i = 0$;;

g) $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 - i, \\ 3z_1 - iz_2 = 2 - 3i; \end{cases}$ h) $\begin{cases} (1+i)z_1 - (1-i) - (1-i)z_2 = 0, \\ (2+i)z_1 - (1-2i)z_2 = 0. \end{cases}$

5. Biểu diễn các số phức sau lên mặt phẳng phức.

a) $z_1 = 3 + 5i$; b) $z_2 = -6 - 2i$; c) $z_3 = -2 + 6i$; d) $z_4 = -4i$; e) $z_5 = -3 + 4i$.

6. Xác định tập hợp điểm trên mặt phẳng phức z được cho bởi các điều kiện:

a) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$; b) $|z - 1| \geq 2|z - i|$.

7. Tìm arcgumen của các số phức sau đây:

a) $z = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$; b) $z = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; c) $-\sin\varphi - i\cos\varphi$.

8. Tính: a) $(1 + 2i)^6$ b) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$

c) $(1 + i)^{25}$ d) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$.

9. Chuyển các số phức sau về dạng lượng giác số phức:

a) $1 - i$; b) $1 + \sqrt{3}\,i$; c) $-1 + \sqrt{3}\,i$;

d) $-1 - \sqrt{3}\,i$; e) $1 - \sqrt{3}\,i$; f) $2i$.

10. Tính căn các số phức sau:

a) $\sqrt[3]{2+2i}$; b) $\sqrt[3]{4}$; c) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$;

d) $\sqrt[3]{2-2i}$; e) $\sqrt[4]{-4}$;

11. Tính lũy thừa sau:

a) $(1+2i)^6$; b) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$; c) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$;

d) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2$; e) $(1+i)^{25}$; f) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

12. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$; b) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

13. Chứng minh rằng: $z=(1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)$ là một số thực.

14. Tìm các số thực x, y thoả mãn đẳng thức: $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.

BÀI 2: ÁNH XẠ VÀ HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

2.1. ÁNH XẠ

2.1.1. Định nghĩa

Cho hai tập hợp X, Y khác $\emptyset$. Ta gọi ánh xạ f từ X vào Y là một quy luật cho ứng với mỗi phần tử $x \in X$ một và chỉ một phần tử $y \in Y$, ký hiệu $f: X \to Y, x \mapsto y = f(x)$.

X được gọi là tập hợp nguồn, Y là tập hợp đích, phần tử y được gọi là ảnh của x và x được gọi là nghịch ảnh của y.

Ví dụ 2.1. Với $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $x \mapsto y = f(x) = 2x + 1$ là một ánh xạ. Vì mỗi $x \in \mathbb{R}$ ta chỉ được một và chỉ một $y = 2x + 1 \in \mathbb{R}$.

2.1.2. Ảnh của một tập con

Nếu $A \subset X$ thì tập hợp các ảnh qua ánh xạ f của các phần tử $x \in A$ gọi là ảnh của tập hợp A qua f, kí hiệu $f(A)$. Xác định: $f(A) = \{y | y = f(x), x \in A\}$

Ví dụ 2.2. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+; x \mapsto y = f(x) = x^2$

Nếu $A = [0; 2] \subset \mathbb{R}$ thì $f(A) = \{y | y = x^2, x \in [0; 2]\} = [0; 4] \subset \mathbb{R}_+$

2.1.3. Các loại ánh xạ

Cho ánh xạ $f: X \to Y; x \mapsto y = f(x)$, với $X, Y \subset \mathbb{R}$.

- Ánh xạ f được gọi là đơn ánh nếu: $\forall x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Ánh xạ f là toàn ánh nếu với: $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ có ít nhất một nghiệm $x \in X$.
- Ánh xạ f gọi là song ánh nếu nó là đơn ánh và toàn ánh, hay phương trình $f(x) = y$ có duy nhất một nghiệm $x \in X$ với $\forall y \in Y$.

Ví dụ 2.3. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto y = f(x) = x^3 + 1$

Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ hay $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Do đó f là đơn ánh.

Với $\forall y \in \mathbb{R}$, phương trình $x^3 + 1 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-1} \in \mathbb{R}$, hay phương trình $x^3 + 1 = y$ có 1 nghiệm.

Vậy $\exists x = \sqrt[3]{y-1} \in \mathbb{R}$ để $f(x) = x^3 + 1 = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1$ hay f là toàn ánh.

Do f vừa là đơn ánh và vừa là toàn ánh nên f là song ánh.

2.1.4. Ánh xạ ngược của một song ánh

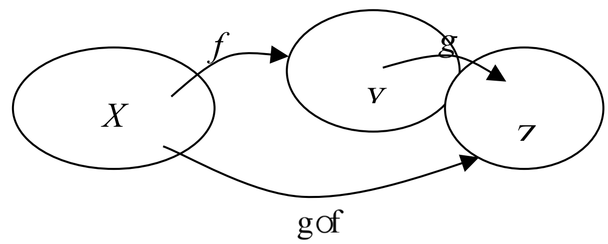
Cho ánh xạ $f: X \to Y$ là một song ánh khi đó ánh xạ biến $y \in Y$ thành $x \in X$ sao cho $f(x) = y$ gọi là ánh xạ ngược của song ánh f, kí hiệu: f^{-1}.

Vậy $f^{-1}: Y \to X, y \mapsto x = f^{-1}(y)$

Ví dụ 2.4. Ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^3 + 1$ là một song ánh (*xem ví dụ 2.3*) nên có ánh xạ ngược f^{-1} là $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, xác định bởi $y \mapsto \sqrt[3]{y-1}$.

2.1.5. Tích của hai ánh xạ

Cho ba tập hợp X, Y, Z và hai ánh xạ $f: X \to Y$, $x \mapsto y = f(x)$; $g: Y \to Z$, $x \mapsto z = g(y)$. khi đó ánh xạ từ X vào Z xác định bởi: $x \mapsto z = g[f(x)]$ gọi là



Hình 1.7

tích của ánh xạ f và g, kí hiệu là $g \circ f$ (*đọc là g tròn f*).

Vậy $g \circ f: X \to Z;\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(y)$

Ví dụ 2.5. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$, với $x \mapsto \sin x$

$g: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, với $x \mapsto e^x$

Ta có: $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = e^{\sin x}$.

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sin e^x$.

2.2. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

2.2.1. Định nghĩa hàm số một biến số

Cho X là một tập con của $\mathbb{R}$, khác rỗng. Người ta gọi ánh xạ $f: X \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x)$ là hàm số một biến xác định trên tập X, trong đó x gọi là biến số độc lập, y là biến số phụ thuộc hay hàm số của x, X gọi là tập xác định của hàm số f, tập hợp $f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x),\ \forall x \in X\}$ gọi là miền giá trị của f.

Ví dụ 2.6. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto y = f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Khi đó, hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ xác đinh bởi ánh xạ f có tập xác định là $\mathbb{R}$, có miền giá trị của hàm số y được xác định:

$$f(\mathbb{R}) = \{y : y \in \mathbb{R},\ y = f(x) = x^2 - 2x + 3,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

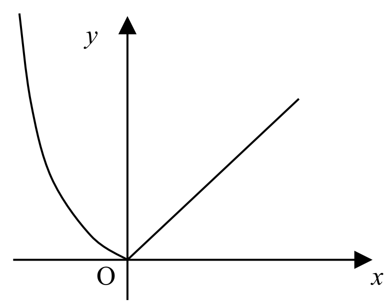
$$= \{y : y \in \mathbb{R},\ y = (x-1)^2 + 2 \geq 2,\ \forall x \in \mathbb{R}\} = [2; +\infty).$$

2.2.2. Đồ thị của hàm số một biến số

Cho hàm số $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$. Ứng với mỗi giá trị $x_0 \in X$, ta được giá trị $y_0 = f(x_0)$. Gọi $M_0(x_0; y_0)$ cho x_0 biến thiên trên tập xác định X, điểm M_0 biến thiên theo và tạo nên một đường cong trong mặt phẳng toạ độ Oxy gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Tóm lại, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp những điểm có tọa độ thoả mãn hệ thức $y = f(x)$.

Ví dụ 2.7. Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} x^2 & khi\ \ x \leq 0 \\ x & khi\ \ x \geq 0 \end{cases}$



Hình 1.8

2.2.3. Hàm số đơn điệu, hàm số chẵn, hàm số lẽ, hàm số tuần hoàn

a) *Hàm số đơn điệu*

• Hàm số $f(x)$ gọi là tăng (hay đồng biến) trong khoảng $(a; b)$ nếu:

$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

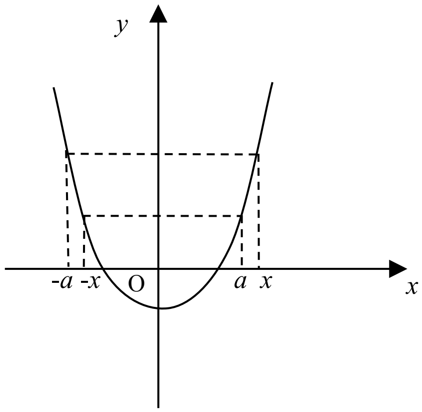
• Hàm số $f(x)$ gọi là giảm (hay nghịch biến) trong khoảng $(a; b)$ nếu:

$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

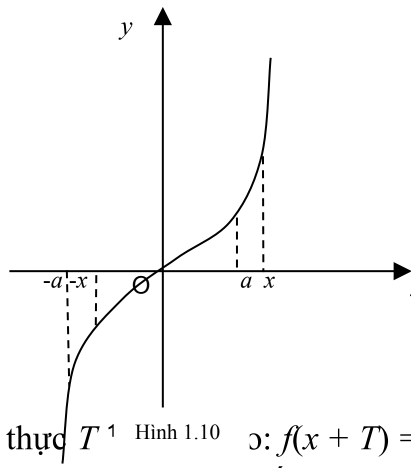
Hàm số $f(x)$ gọi là đơn điệu trong khoảng $(a; b)$ nếu nó tăng hoặc giảm trong khoảng ấy.

a) *Hàm số chẵn, hàm số lẻ*

• Hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng ($-a$; a) gọi là chẵn nếu: với "x Î ($-a$; a), $f(-x) = f(x)$ và gọi là lẻ nếu "x Î ($-a$; a), $f(-x) = -f(x)$. Đồ thị hàm số chẵn nhận *Oy* làm trục đối xứng (*hình 1.9*) đồ thị hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng (*hình 1.10*).



Hình 1.9



Hình 1.10

b) *Hàm số tuần hoàn*

Hàm số $f(x)$ gọi là tuần hoàn nếu tồn tại số thực T ¹ o: $f(x + T) = f(x)$, "x Î X (*). Số dương p nhỏ nhất thoả mãn đẳng thức (*) gọi là chu kỳ của hàm số.

Ví dụ 2.8. a) Hàm số $y = \sin x$, tuần hoàn với chu kì 2p ;

b) Hàm số $y = x^2$, xác định "x Î R , là hàm số chẵn vì "x Î R , ta có:

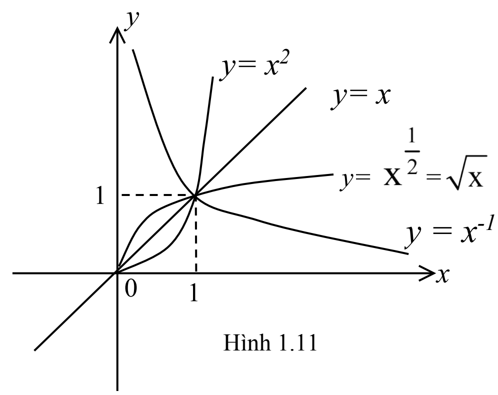
$f(x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

c) Hàm số $y = x^3$, xác định "x Î R , là hàm số lẻ vì:

"x ÎR , $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

2.2.4. Các hàm số sơ cấp cơ bản

Người ta gọi hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép cộng, trừ, nhân, chia, phép lập hàm số hợp với những hàm số sơ cấp cơ bản,



Hình 1.11

Ví dụ 2.9. Hàm số $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$, $y = \dfrac{1+\sin x}{1+x^2} + \arctan(2x+3)$ là những hàm sơ cấp.

Ta xét một số hàm số sơ cấp thường gặp sau:

a) *Hàm số luỹ thừa:* $y = x^a$, a **Î** R .

Miền xác định của hàm số phụ thuộc vào a

+ Nếu a Î N thì x Î R ;

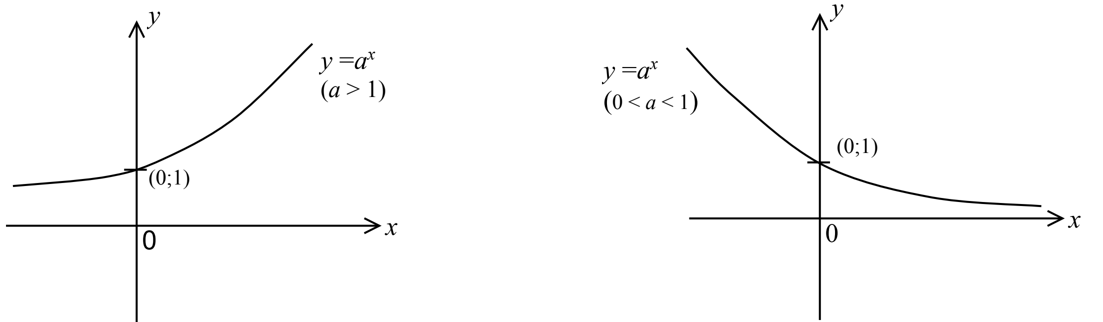
+ Nếu a Î Z thì x Î R \{0};

+ Nếu $a = \dfrac{1}{p}$ thì x Î R$_+$ nếu p Î N*, p chẵn và x Î R nếu p Î N*, p lẻ.

+ Nếu a là số vô tỉ thì quy ước chỉ xét hàm số với $x > 0$. Đồ thị của hàm số $y = x^2$ luôn đi qua điểm (1; 1) và đi a gốc toạ độ nếu $a \geq 0$.

b) ***Hàm số mũ:*** $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

- Số a gọi là cơ số của hàm số mũ.
- TXĐ: $x \in \mathbb{R}$
- MGT: $y \in \mathbb{R}_+$
- Nếu $a > 1$ hàm số tăng, $0 < a < 1$ hàm số giảm.
- Đồ thị hàm số được cho ở hình 1.12

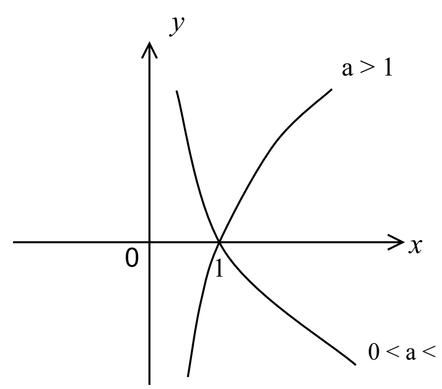


Hình 1.12

c) ***Hàm số Lôgarit:*** $y = \log_a x$, $a > 0$; $a \neq 1$

- Tập xác định: $\mathbb{R}_+$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- $a > 1$ hàm số tăng, $0 < a < 1$ hàm số giảm
- Hàm số $y = \log_a x$ có các tính chất sau:

1. $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$, ($x_1, x_2 > 0$)
3. $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$, ($x_1 > 0, x_2 > 0$)
4. $\log_a x^2 = 2\log_a x$, ($x > 0$)
5. $a^{\log_a x} = x$, ($x > 0$)
6. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, (công thức đổi cơ số ($0 < a \neq 1$, $b > 0$, $0 < c \neq 1$).



Hình 1.13

- Đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ được suy từ đồ thị $y = a^x$ bằng phép lấy đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất (*hình 1.14*).

Chú ý: Lôgarit cơ số 10 của x còn gọi là lôgarit thập phân của x, ký hiệu là lg$x$, lôgrit cơ số e của x gọi là lôgarit tự nhiên của x kí hiệu là ln$x$.

2.2.6. Hàm số hợp

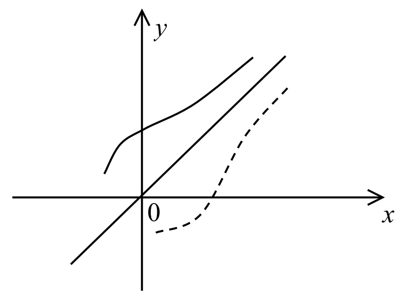
Giả sử $y = f(u)$ là hàm số của biến số u, đồng thời $u = g(x)$ là hàm số của biến số x. Khi đó, $y = f(u) = f(g(x))$ là hàm số hợp của biến số độc lập x thông qua biến số trung gian u, kí hiệu $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Ví dụ 2.10. Cho hàm số $y = f(u) = \sin u$, $u = g(x) = \ln x$

$\Rightarrow$ hàm số hợp $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(\ln x)$.

2.2.7. Hàm số ngược

Giả sử $y = f(x)$ là một hàm số xác định, đơn điệu trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$. Khi đó, f là một song ánh từ X lên $f(X) = Y$. Do đó, mỗi phần tử $y \in Y$ đều là ảnh của một phần tử duy nhất $x \in X$. Quy tắc cho ứng với mỗi phần tử $y \in Y$, một phần tử duy nhất $x \in X$ gọi là hàm số ngược của f và được ký hiệu là f^{-1}. Vậy f^{-1} là một hàm số xác định trên $Y = f(X)$, lấy giá trị trong X. Ánh xạ $f^{-1}: Y \rightarrow X$ cũng là một song ánh. Như vậy $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.



Hình 1.14

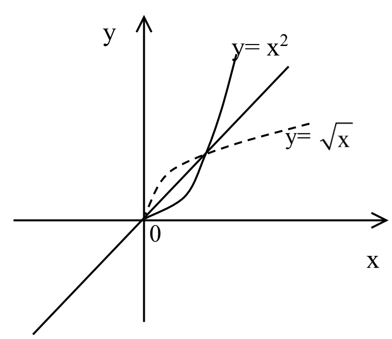
Nhưng thông thường, ta vẫn dùng x để chỉ biến số độc lập và y để chỉ hàm số. Vì vậy, ta viết hàm số ngược của $f(x)$ là: $f^{-1}: x \mapsto y = f^{-1}(x)$

Đồ thị của hai hàm số f và f^{-1} đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất (*hình 1.14*).

Ví dụ 2.11. Cho hàm số $y = x^2$ tăng trên $\mathbb{R}_+$, nó là một song ánh từ $\mathbb{R}_+$ lên $\mathbb{R}_+$. Do đó nó có hàm số ngược $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ xác định bởi $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$.

Đổi vai trò x và y ta được $y = \sqrt{x}$.

Đồ thị của hàm số $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$ được cho ở hình 1.15.



Hình 1.15

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 1$. Tính $f(4)$; $f(\sqrt{2})$; $f(a+1)$; $f(a^4)$.

2. Cho $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$. Tính $f(\dfrac{1}{a})$ và $\dfrac{1}{f(a)}$.

3. Cho $f(x) = \lg x$; $g(x) = x^4$. Tính $f[g(2)]$; $g[f(2)]$.

4. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Nếu nó là song ánh, hãy tìm ánh xạ ngược.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 7$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2x - 3$;

5. a) Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Xét f là đơn ánh, toàn ánh không? Tìm ảnh $f(\mathbb{R})$.

b) Cho g: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{x}$. Tìm tích của hai ánh xạ $f \circ g$.

6. Tìm miền xác định các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{1 - x^2}$;   b) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{7 - x}$;

7. Tìm hàm ngược của các hàm số sau trên miền tồn tại của nó:

a) $y = 10^{x+1}$;   b) $y = x^2 - 2x$, với $x \geq 1$;

c) $y = 2\sin 3x$;   d) $y = \dfrac{2x}{1+2x}$.

8. Tìm miền xác định của các hàm số sau đây:

a) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{7-x}$;   b) $y = \lg\dfrac{a+x}{a-x}$, $(a > 0)$;

c) $y = \arcsin^2 x$;   d) $y = \mathrm{tg}(\dfrac{2x+\pi}{3})$;

9. Trong các hàm sau, hàm số nào là hàm số chẵn, hàm số lẻ, không chẳn không lẻ:

a) $y = 2^x$;   b) $y = 2^{-x^2}$;

c) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$;   d) $y = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$;

e) $y = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$;   f) $y = \dfrac{x}{a^x - 1}$, $(a > 0, a \neq 1)$.

10. Tìm hàm số ngược của các hàm số sau trên miền tồn tại của nó:

a) $y = 10^{x+1}$;   b) $y = 1 + \log(x+2)$;   c) $y = x^2 - 2x$ khi $x \geq 1$;

BÀI 3: GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

3.1. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

3.1.1. Định nghĩa 1

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định ở lân cận điểm x_0 (có thể trừ điểm x_0). Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là A khi x dần tới x_0 nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, đều tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho khi $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - A| < \varepsilon$, ký hiệu là: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ hay $f(x) \to A$ khi $x \to x_0$.

Ví dụ 3.1. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 1) = 3$.

Giải: Ta chỉ cần chỉ ra rằng nếu cho trước $\varepsilon > 0$ thì tìm được số $\delta > 0$ sao cho $|2x + 1 - 3| < \varepsilon$ nếu $|x - 1| < \delta$. Ta có: $|2x + 1 - 3| = 2|x - 1| < \varepsilon$ nếu $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Nên ta chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ thì điều đặt ra thoả mãn. Vậy, $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 1) = 3$.

3.1.2. Giới hạn trái, giới hạn phải

- Trong định nghĩa 1, nếu khi x dẫn tới x_0 về phía trái (tức là x dần tới x_0 và $x < x_0$) mà $f(x)$ dần về A thì A gọi là giới hạn trái tại x_0, kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
- Tương tự, người ta định nghĩa giới hạn phải tại x_0, kí hiệu là: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
- Hàm số $f(x)$ có giới hạn A khi $x \to x_0$ khi và chỉ khi:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

Ví dụ 3.2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & Khi \quad x < 0 \\ 1 - x & Khi \quad x \geq 0 \end{cases}$

Giải: Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(1 - x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Vậy, $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

3.1.3. Định nghĩa 2

Người ta nói hàm $f(x)$ dần tới $+\infty$ khi $x \to a$ nếu với mọi số M > 0 cho trước lớn bao nhiêu tuỳ ý, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho khi $|x - a| < \delta$ ta có $f(x) > M$, ký hiệu $f(x) \to +\infty$ khi $x \to a$ hay $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

- Tương tự $f(x) \to -\infty$ khi $x \to a$ nếu $\forall M < 0$ cho trước, bé bao nhiêu tuỳ ý, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|x - a| < \delta$ ta có $f(x) < M$, ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

• Ta nói hàm f(x) $\to$ A khi x $\to +\infty$ nếu với $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được N > 0 đủ lớn sao cho khi x > N thì $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

• Tương tự ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

Ví dụ 3.3. a) Khi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, vì với số M > 0 cho trước ta có:

$\dfrac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \dfrac{1}{M} \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$

Vậy, với $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, ta thấy khi $|x| < \delta$ thì $\dfrac{1}{x^2} > M$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$, vì với số $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có: $2^x < \varepsilon \Leftrightarrow x < \log_2 \varepsilon$, với $N = \log_2 \varepsilon$, ta thấy khi $x < N$ thì $2^x < \varepsilon$.

3.1.4. Các phép toán và công thức cơ bản về giới hạn

• **Định lý:** Giả sử $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A_1; \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A_2$, khi đó:

a) $\lim\limits_{x \to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = A_1 \pm A_2$

b) $\lim\limits_{x \to a}(f_1(x).f_2(x)) = A_1.A_2$

c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{A_1}{A_2}$, nếu $A_2 \neq 0$

• **Các giới hạn cơ bản:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ nếu f(x) $\to \infty$ khi x $\to \infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$ nếu $f(x) \to 0$ khi $x \to a$

Ví dụ 3.4. Thông thường khi tìm giới hạn của hàm số gặp các hạng vô định $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$,… ta phải tìm cách biến đổi để khử chúng. Có nhiều cách nhau để khử dạng vô định. Sau đây, giới thiệu một số cách khử dạng vô định thông qua ví dụ cụ thể sau:

a) Xét $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$. $\left(\text{dạng } \dfrac{0}{0}\right)$

Ta có: $\dfrac{x^m - 1}{x^n - 1} = \dfrac{(x-1)(x^{m-1} + \ldots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + \ldots + x + 1)}$

Do đó: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1} = \dfrac{m}{n}$

b) Xét $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.\left(\text{dạng } \dfrac{0}{0}\right)$

Thực hiện phép biến đổi $\sqrt{1+x} = y \Rightarrow x = y^2 - 1$

Khi $x \to 0$, $y \to 1$. Do đó

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{1}{y+1} = \frac{1}{2}$$

c) Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[5]{1+x}}{x} \quad \left(\text{dạng } \dfrac{0}{0}\right)$

Ta viết: $\dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[5]{1+x}}{x} = \dfrac{(\sqrt[3]{1+x} - 1) - (\sqrt[5]{1+x} - 1)}{x}$

Do đó: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[5]{1+x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{x} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{15}$

d) Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} \quad \left(\text{dạng } \dfrac{\infty}{\infty}\right).$

Để khử dạng này ta chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{x}$ được: $\dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{1 + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}}$

Do đó: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1 + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}} = 1$

e) Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \qquad (\text{dạng } \infty - \infty)$

Khử dạng vô định này ta nhân với lượng liên hợp và được:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}}$$

Khi đó:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

3.1.5. Vô cùng bé và vô cúng lớn

a) *Định nghĩa 1*

- Hàm số $f(x)$ gọi là vô cùng bé (viết tắt là VCB) khi $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

- Từ định nghĩa giới hạn của hàm số, ta suy ra rằng nếu $f(x) \to A$ khi $x \to a$ thì $f(x) = A + \alpha(x)$. Trong đó $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a$.

- Hàm F(x) gọi là vô cùng lớn (viết tắt là VCL) nếu $\lim\limits_{x \to a} |F(x)| = +\infty$.

- Dễ dàng thấy rằng nếu $f(x)$ là một VCB khi $x \to a$ thì $\dfrac{1}{f(x)}$ là một VCL và ngược lại nếu F(x) là một VCL khi $x \to a$ thì $\dfrac{1}{F(x)}$ là một VCB khi $x \to a$.

b) *Tính chất*

+) Nếu $f_1(x)$, $f_2(x)$ là hai VCB khi $x \to a$ thì $f_1(x) \pm f_2(x)$; $f_1(x).f_2(x)$ cũng là những VCB khi $x \to a$.

+) Nếu $f_1(x)$, $f_2(x)$ là hai VCL cùng dấu khi $x \to a$ thì $f_1(x) + f_2(x)$ cũng là một VCL khi $x \to a$. Tính của hai VCL khi $x \to a$ cũng là một VCL khi $x \to a$.

c) *So sánh các đại lượng VCB*

- ***Định nghĩa 2:*** Giả sử $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \to a$.

Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.

Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$.

Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$ ($\ne 0$, $\ne \infty$), ta nói rằng $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là 2 VCB cùng bậc.

Ví dụ 3.5. i) sin3x và x đều là VCB khi $x \to 0$

Vì $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x}.3 = 3$

Nên sin3x và x làVCB cùng bậc.

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{x}{2}.\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 0$

$\Rightarrow$ 1 – cos2x là VCB bậc cao hơn 2x.

- ***Định nghĩa 3:*** Hai VCB khi $x \to a$ gọi là tương đương với nhau nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Ta có: nếu $\alpha(x) \to 0$ khi $x \to a$ thì:

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\text{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\text{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$

c) *Định lý*

- ***Định lý 1:*** Nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \to a$, $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ khi $x \to 0$

  thì $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1$

Do đó: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}.\dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)}.\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\right) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

- ***Định lý 2:*** (*Quy tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao*)

Nếu $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to a$, $\beta(x)$ là VCB bậc cao hơn $\alpha(x)$ thì khi $x \to a$. $\alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$.

Chứng minh: Thật vậy, ta có:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 + \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$$

Ví dụ 3.6. Chứng minh rằng $\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x\sqrt{x}}$ khi $x \to 0$

Giải: Khi $x \to 0$ thì $\sin\sqrt{x\sqrt{x}} = \sin x^{\frac{3}{4}} \sim x^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow \sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x\sqrt{x}}$ khi $x \to 0$.

Ví dụ 3.7. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \text{arctg}^2 x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x + x^2 - x^2}{3x} = \dfrac{2}{3}$

Giải: Ta có: $\sin 2x \sim 2x$

$\arcsin^2 x \sim x^2$, $\text{arctg}^2 x \sim x^2$ khi $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \text{arctg}^2 x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x + x^2 - x^2}{3x} = \frac{2}{3}$$

- ***Định lý 3:*** Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai VCL khi $x \to a$, $F(x) \sim F_1(x)$, $G(x) \sim G_1(x)$ khi $x \to a$ thì: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{F_1(x)}{G_1(x)}$.

- ***Định lý 4:*** Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai VCL khi $x \to a$, $G(x)$ là VCL bậc thấp hơn $F(x)$ khi $x \to a$, $F(x) + G(x) \sim F(x)$.

Ví dụ 3.8. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^3 - \sqrt{x^5} + 6x}{12x^3 + x^2 - 6\sqrt{x}}$

Ta có: $7x^3 - \sqrt{x^5} + 6x \sim 7x^3$ khi $x \to \infty$

$12x^3 + x^2 - 6\sqrt{x} \sim 12x^3$ khi $x \to \infty$

Vậy: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^3-\sqrt{x^5}+6x}{12x^3+x^2-6\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^3}{12x^3}=\dfrac{7}{12}$.

3.2. TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

3.2.1. Các định nghĩa

a) ***Định nghĩa 1:*** Cho f là một hàm số xác định trong khoảng (a, b), x_0 là một điểm thuộc (a, b). Người ta nói rằng hàm số f liên tục tại x_0 nếu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Nếu hàm số f không liên tục tại x_0 thì ta nói f gián đoạn tại x_0.

Ví dụ 3.9. Hàm số $y = x^2 + 1$ liên tục tại $\forall x_0 \in R$.

Vì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x^2+1)=x^2+1=f(x_0)$

c) ***Định nghĩa 2:***

- Hàm số $f(x)$ liên tục trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

c) ***Định nghĩa 3:*** Hàm số f được gọi là liên tục trong (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoảng đó. Hàm số f được gọi là liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$, nếu có liên tục tại mọi điểm thuộc (a, b), liên tục phải tại a và liên tục trái tại b.

3.2.2. Các phép toán về hàm số liên tục

Từ các định lý về giới hạn của tổng, tích, thương và từ định nghĩa của hàm số liên tục tại một điểm, có thể dễ dàng suy ra:

a) ***Định lý:*** Nếu f và g là hai hàm số liên tục tại x_0 thì:

1. $f + g$ liên tục tại x_0.
2. $f.g$ liên tục tại x_0.
3. $\dfrac{f}{g}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

b) ***Định lý:*** Nếu hàm số $u = g(x)$ liên tục tại x_0, hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $u_0 = g(x_0)$ thì hàm số hợp $y = (fog)(x) = f[g(x)]$ liên tục tại x_0.

Chứng minh: Ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x)$, vì g liên tục tại x_0.

$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$, vì f liên tục tại u_0.

Do đó: $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(\lim\limits_{u\to u_0} u)=f(u_0)=f[\varphi(x_0)]$.

3.2.3. Tính chất của hàm số liên tục

Các định lý sau đây (không chứng minh) nêu lên những tính chất cơ bản của hàm số liên tục.

a) *Định lý 1:* Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn trong đoạn đó, tức là tồn tại hai số m và M sao cho: $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a, b]$.

b) *Định lý 2:* Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì nó đạt giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của nó trên đoạn ấy, tức là tồn tại hai điểm $x_1, x_2 \in [a, b]$ sao cho: $f(x_1) = m \le f(x), \forall x \in [a, b]$; $f(x_2) = M \ge f(x), \forall x \in [a, b]$

c) *Định lý 3:* (*định lý về giá trị trung gian*). Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, m và M các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của nó trên đoạn đó thì với mọi số p nằm giữa m và M, luôn tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = p$.

d) *Hệ quả:* Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, $f(a).f(b) < 0$ thì trong khoảng (a, b) tồn tại điểm c sao cho $f(c) = 0$.

3.2.3. Các ví dụ

Ví dụ 3.10. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & (x \ne 2) \\ 1 & (x = 2) \end{cases} \quad \text{tai} \quad x_0 = 2$$

Ta có $f(2) = 1$ và

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{1 - (2x - 3)}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{2(2 - x)}{2 - x} = 2 \ne f(2)$$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0 = 2$.

Ví dụ 3.11. Chứng minh rằng phương trình: $\cos x + m\cos 2x = 0$ luôn có nghiệm.

Giải: Đặt $f(x) = \cos x + m\cos 2x$, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + m\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + m\cos\frac{3\pi}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0 \text{ theo hệ quả ta suy ra } \exists x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right): f(x_0) = 0$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

BÀI TẬP

1. Sử dụng định nghĩa về giới hạn của hàm số, chứng minh rằng:

a) $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 2) = 1$; b) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$;

c) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{2x-1}{3x+2} = \dfrac{2}{3}$; d) $\lim\limits_{x \to 1} a^x = +\infty \quad (a > 1)$;

2. So sánh các bậc VCB và VCB tương đương. Khi $x \to 0$, hãy so sánh VCB $g(x) = x$ với các VCB sau:

$f_1 = \tan x^3$; $f_2 = \sqrt[3]{\sin^2 x}$; $f_3 = \sqrt{x+9} - 3$; $f_4 = 1 - \cos x$; $f_5 = \arctan\sqrt[3]{x}$.

3. Hãy so sánh các VCL sau (khi $x \to \infty$):

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ và $g(x) = 2x^3 + 2x - 1$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{x+a}$ và $g(x) = \sqrt[3]{x}$;

4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^2+5}$; b) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$;

c) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2x^3+8}{x^2+1}$; d) $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

e) $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-12x+20}$; f) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

5. Sử dụng các VCB tương đương, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctan^2 x}{3x+4x^3}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{(\sin x - \tan x)^2 + (1-\cos 2x)^4 + x^5}{7\tan^7 x + \sin^6 x + 2\sin^5 x}$;

6. Tìm giới hạn một phía của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ khi $x \to 1$; b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$ khi $x \to 0$.

7. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; c) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

BÀI 4: CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

4.1. PHÉP ĐO GÓC

Chúng ta hãy bắt đầu mô tả làm thế nào để tạo nên các góc. Một phần của đường thẳng xuất phát từ một điểm được gọi là một tia.

Điểm *O* được gọi là gốc của tia. Một góc được hình thành bởi việc quay xung quanh điểm gốc của nó với một góc được kí hiệu bởi α. Vị trí đầu của tia được gọi là cạnh đầu của góc. Vị trí cuối của tia sau khi quay được gọi là cạnh cuối của góc. Điểm *O* được gọi là đỉnh của góc. Nếu *A* và *B* là các điểm trên các cạnh đầu và cuối của góc thì ta có thể gọi α là góc *AOB*. Sẽ là thuận tiện nếu chúng ta đặt các góc trên một mặt phẳng tọa độ sao cho đỉnh của gốc nằm ở gốc tọa độ và cạnh đầu của góc là trục *Ox* dương. Sự sắp đặt này được gọi là vị trí chuẩn của 1 góc.

Khi một góc thu được bởi việc quay cạnh đầu ngược chiều kim đồng hồ thì ta nói rằng góc là góc dương. Khi góc thu được bằng việc quay cạnh đầu theo chiều kim đồng hồ thì ta nói góc là góc âm.

4.1.1. Đơn vị đo độ

Ta đã biết đường tròn bán kính R có độ dài bằng $2\pi R$ và có số đo bằng 360°. Nếu ta chia đường tròn thành 360 phần bằng nhau thì mọi cung tròn này có độ dài bằng $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ và có số đo bằng 1°, góc ở tâm chắn mỗi cung đó có số đo bằng 1°.

Vậy cung tròn bán kính R có số đo a° ($0^o \le a \le 360^o$) thì có độ dài là $\frac{\pi a}{180}R$.

Ví dụ 4.1. - Số đo của $\frac{3}{4}$ đường tròn là $\frac{3}{4}.360 = 270^o$; Cung tròn bán kính R có số đo 72° thì có độ dài là $\frac{\pi.72}{180}R = \frac{2\pi R}{5}$.

4.1.2. Đơn vị đo rađian

Một đơn vị khác được sử dụng nhiều trong toán học, khoa học và kĩ thuật là rađian. Nó tỏ ra thuận lợi khi tính độ dài cung tròn.

Định nghĩa: Cung trong có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rađian, gọi tắt là cung 1 rađian. Góc ở tâm chắn cung 1 rađian, gọi tắt là góc 1 rađian. 1 rađian còn viết tắt là 1 rad.

Ví dụ 4.2. Để hình dung góc 1rad người ta quấn đoạn dây dài bằng bán kính đường tròn quanh đường tròn đó. Hãy làm điều trên và đo xem góc 1rad xấp xỉ bằng bao nhiêu độ ?

+ Xét các cung của đường tròn bán kính R. Vì cung tròn có độ dài bằng R thì có số đo 1rad nên:

- Toàn bộ đường tròn (do có độ dài bằng $2\pi R$) có số đo rađian là $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$
- Cung có độ dài bằng l thì có số đo rađian là $\alpha = \frac{l}{R}$.

Vậy cung trong bán kính R có số đo α rad thì có độ dài $l = \alpha R$, và khi R = 1 (tức là trên đường tròn đơn vị) thì độ dài cung tròn bằng số đo rađian của nó.

+ Bây giờ, ta xét quan hệ giữa số đo rađian và số đo độ của cùng một cung tròn. Giả sử cung tròn có độ dài l. Gọi α là số đo rađian và a là số đo độ của cung đó. Khi đó, theo các công thức về độ dài cung, ta có: $l = \alpha R = \frac{\pi a}{180} R$, Suy ra $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$.

Vậy, cung có số đo 1 rađian thì có số đo độ là $\frac{180}{\pi}$, tức là: 1rad = $(\frac{180}{\pi})^o \approx 57^o17'45''$.

Cung có số đo 1 độ thì có số đo rađian là $\frac{\pi}{180}$, tức là: $1^0 = \frac{\pi}{180}$rad $\approx$ 0,0175 rad.

Chú ý: Vì tính chất tự nhiên và thông dụng của rađian, người ta thường viết chữ rađian hay rad sau số đo của cung và góc, chẳng hạn $\frac{\pi}{2}$rad cũng được viết là $\frac{\pi}{2}$.

Ghi nhớ: Bảng chuyển đổi số đo độ và số đo ra đian của một số cung tròn.

Độ	30^o	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
Rađian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

4.2. CÁC GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ CÁC ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

4.2.1. Các giá trị của hàm số lượng giác

Nếu góc lượng giác có số đo α, $0 \le \alpha \le \pi$, thì các giá trị lượng giác của nó bằng các giá trị lượng giác của góc hình học *Ouv* đã học trước đây. Vậy ta có bảng sau:

Góc	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Cot α	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

Chú ý: Khi mới biết một giá trị lượng giác của góc α, ta có thể dùng các công thức lượng giác (ở mục 4.2.2) và dấu của giá trị lượng giác để tính toán các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

4.2.2. Các đẳng thức cơ bản

i). Vì các góc lượng giác $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ cùng xác định một điểm *M* trên đường tròn lượng giác nên ta có: $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$; $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$.

ii). Với mọi α, ta luôn có: $-1 \le \cos\alpha \le 1$; $-1 \le \sin\alpha \le 1$

iii). Với mọi α, ta luôn có: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

iv). Từ ý nghĩa hình học nói trên, nên với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có:

$tan(\alpha + k\pi) = tan\alpha$; $cot(\alpha + k\pi) = cot\alpha$ (*khi các biểu thức có nghĩa*).

v). Từ định nghĩa tan và cotang và từ công thức $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, suy ra ngay các công thức :

Khi $cos\alpha \neq 0$, ta có: $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

Khi $\sin\alpha \neq 0$, ta có: $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

4.2.3. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:

* ***Hai góc đối nhau:*** $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

* ***Hai góc hơn kém nhau*** *π:*

$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$

$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$

$\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$

$\cot(\alpha+\pi) = \cot\alpha$

* ***Hai góc bù nhau:*** $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$

$\cos\alpha = -\cot(180^0 - \alpha)$

$\tan\alpha = -\tan(180^0 - \alpha)$, $\alpha \neq 90^0$

$\cot\alpha = -\cot(180^0 - \alpha)$, $0^0 < \alpha < 180^0$.

* ***Hai góc phụ nhau:*** $\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha$

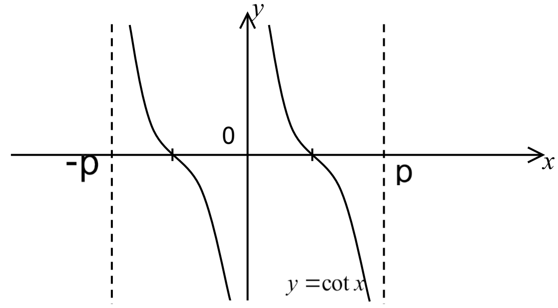
$\tan(\pi/2-\alpha) = \cot\alpha$

$\cot(\pi/2-\alpha) = \tan\alpha$.

Ví dụ 4.3. Cho α, $\pi < \alpha < 3\pi/2$. Hãy tìm *cosα*, nếu biết $sin\alpha = -4/5$.

Giải: Do $\pi < \alpha < 3\pi/2$. Nên $cos\alpha < 0$, từ đó: $cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\dfrac{3}{5}$.

Ví dụ 4.4. Cho α, $-\pi/2 < \alpha < 0$. Hãy tìm $cos\alpha$, $sin\alpha$, biết $tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$



Hình 1.19

Giải: Do $-\pi/2 < \alpha < 0$ nên $cos\alpha > 0$. Vậy, từ

$$cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{5}{4}} = \frac{4}{9}$$

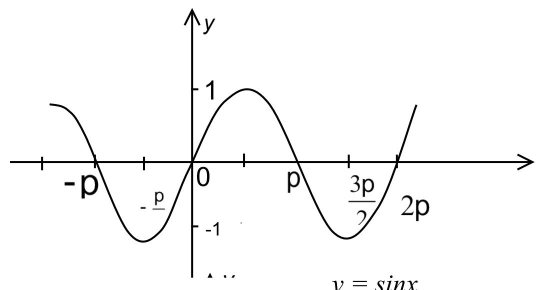
Suy ra: $cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ và từ đó $sin\alpha = cos\alpha.tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

4.3. HÀM SỐ SIN VÀ COSIN

4.3.1. Hàm số sin

Hàm số $y = \sin x$, xác định $\forall x \in \mathbb{R}$, lấy giá trị trên $[-1;1]$ là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kỳ 2π.

Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ như hình 1.16.



Hình 1.16

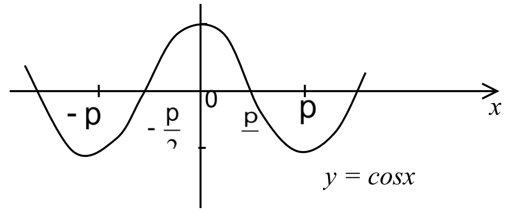
4.3.2. Hàm số cosin

Hàm số $y = \cos x$, xác định $\forall x \in \mathbb{R}$, lấy giá trị trên $[-1; 1]$ là hàm số chẵn tuần hoàn với chu kì 2π.

Đồ thị của hàm số $y = \text{cosin}x$ như trong hình 1.17.

4.4. HÀM SỐ TAN VÀ COT

4.4.1. Hàm số tan



Hình 1.17

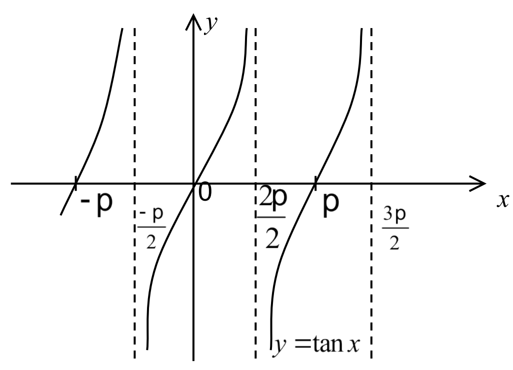
Hàm số $y = \text{tg}x$ (hay $y = \tan x$) xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$, lấy mọi giá trị trên $\mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π.

Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ như hình 1.18.

4.4.2. Hàm số cot

Hàm số $y = \text{cotg}x$ (hay $y = \cot x$) xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$, lấy mọi giá trị trên $\mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π.

Đồ thị của hàm số $y = \cot x$ như hình 1.19.



Hình 1.18

4.5. HÀM SỐ NGƯỢC VÀ ĐỒ THỊ CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

• ***Hàm số y = arcsinx*** (đọc là ac-sin-x)

Xét hàm số $f: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1;1],\ x \mapsto y = \sin x$. Trong khoảng xác định này, f là một song ánh nên nó có hàm số ngược, ký hiệu là f^{-1}, xác định bởi:

$f^{-1}:[-1;1] \to [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}],\ y \mapsto x = \arcsin y$ (đọc là x bằng ac-sin-x), (x là "cung có sin bằng y"), nghĩa là $y = \sin x,\ x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, hay $x = \arcsin y$.

Với qui ước dùng chữ x để chỉ đối số và dùng chữ y để chỉ hàm số thì hàm số ngược của $y = \sin x$ với $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ là hàm số $y = \arcsin x$.

Hàm số $y = \arcsin x$ có miền xác định là khoảng đóng $[-1;\ 1]$ và miền giá trị là khoảng đóng $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ và là một hàm số tăng.

- ***Hàm số y = arccosx*** (đọc là ac-cos-x)

Xét song ánh $f:[0;\pi] \to [-1;1],\ x \mapsto \cos x$. Hàm số f đơn điệu giảm trong đoạn $[-1,\ 1]$, có hàm số ngược $f:[-1;1] \to [0;\pi]$, $y \mapsto x = \arccos y$. (đọc là x bằng $ac\text{-}\cos y$) (x là cung có cos bằng y), nghĩa là $y = \cos x,\ x \in [0;\pi] \Leftrightarrow x = \arccos y$. Theo quy ước trên ta viết hàm số ngược của $y = \cos x$ với $x \in [0;\pi]$ là hàm số $y = \arccos x$.

Hàm số $y = \arccos x$ có miền xác định là khoảng đóng $[-1;\ 1]$ và miền giá trị là khoảng đóng $[0;\pi]$ và là một hàm số giảm.

Vì $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ nên có thể suy ra $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

- Hàm số y = arctan$x$ (đọc là ac-tang-x)

Xét hàm số $y = \tan x$ với $x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, hàm này là một song ánh nên có hàm ngược là $x = \arctan y$ (đọc là x bằng ac-tang-y) (x là cung có "tang" là y), nghĩa là $y = \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = \arctan y$.

Theo quy ước đã nêu, ta viết hàm ngược của $y = \tan x$ với $x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, là $y = \arctan x$. Hàm số $y = \arctan x$ có miền xác định là toàn trục số $\mathbb{R}$ và miền giá trị là khoảng mở $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ và là hàm số tăng.

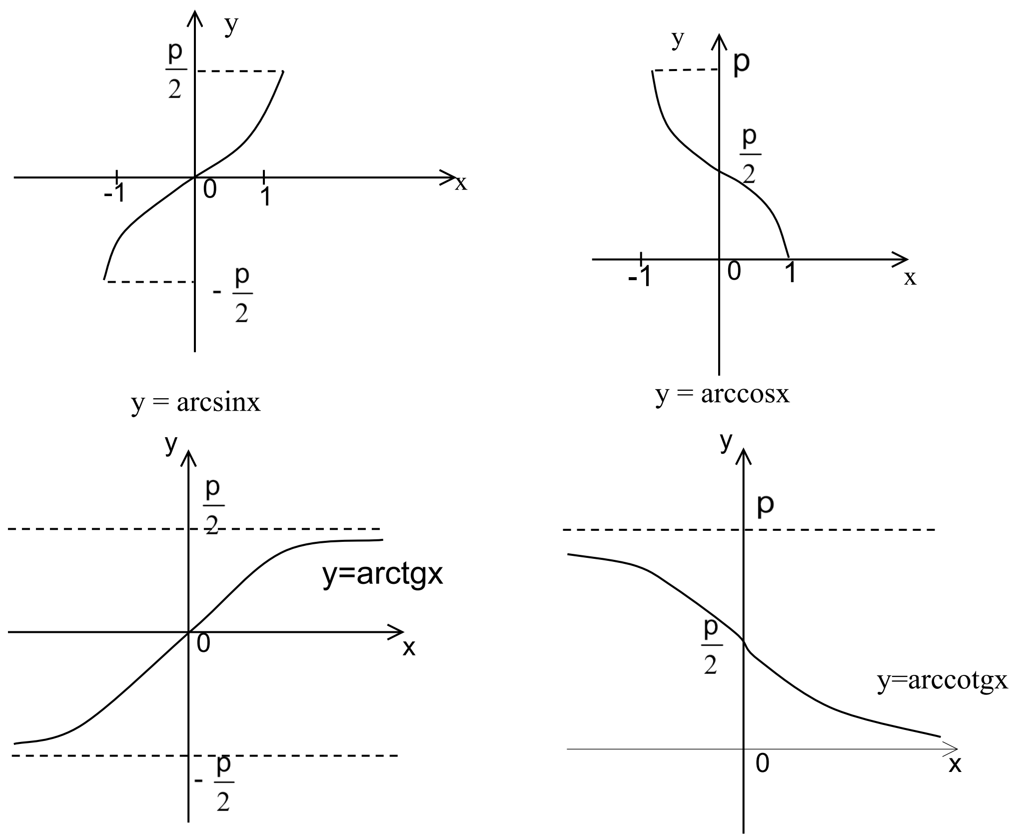
- Hàm số y = arccot$x$ (đọc là ac-cô tang-x), miền xác định là $\mathbb{R}$ và miền giá trị là khoảng mở $(0;\pi)$ và là hàm số giảm.

Hàm số y = cotan$x$ với $x \in (0;\pi)$ có hàm số ngược là $x = arc\cot y$ (đọc là x bằng ac-cô-tang y) (x là cung có cô-tang là y), nghĩa là $y = \cot x,\ 0 < x < \pi$ thì $x = \arctan y$. Khi đó theo quy ước thì hàm số $y = \cot x$ với $x \in (0;\pi)$ có hàm số ngược là $y = arc\cot x$.

Hàm số $y = arc\cot x$ có miền xác định là toàn trục số $\mathbb{R}$ và miền giá trị là khoảng mở $(0;\pi)$ và là hàm số giảm.

Dễ thấy rằng: $\arctan x + arc\cot x = \dfrac{\pi}{2}$.

Đồ thị các hàm số lượng giác ngược được vẽ ở hình 1.20.



Hình 1.20

BÀI TẬP

1. Hãy xác định dấu của các số sau :

a) $sin156^0$; $cos(-80^0)$; $tan556^0$; $tan(-\frac{17\pi}{8})$

b) $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$; $\cos(\alpha-\frac{3\pi}{8})$ và $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$, biết $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2. Tính giá trị lượng giác của các góc sau :

a) $-\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi$; b) $k\pi$ c) $\frac{\pi}{2}+k\pi$ d) $\frac{\pi}{4}+k\pi, \forall k\in \mathbb{Z}$

3. Tính các giá trị lượng giác của góc *a* trong các trường hợp sau :

a) $cosa=\frac{1}{4}$, $sina<0$

b) $sina=-\frac{1}{3}, \frac{\pi}{2}<a<\frac{3\pi}{2}$

c) $tana=\frac{1}{2}, -\pi<a<0$

4. Đơn giản biểu thức:

a) $\sqrt{\sin^4 a+\sin^2 a\cos^2 a}$

b) $\frac{1-\cos a}{\sin^2 a}-\frac{1}{1+\cos a}$ (giả sử $sina \neq 0$)

c) $\frac{1-\sin^2 a\cos^2 a}{\cos^2 a}-\cos^2 a$ (giả sử $cosa \neq 0$).

5. Chứng minh đẳng thức sau:

a) $\cos^4 a-\sin^4 a=2\cos^2 a-1$

b) $\frac{1+\sin^2 a}{1-\sin^2 a}=1+2\tan^2 a$

c) $\tan^2 a-\sin^2 a=\tan^2 a\sin^2 a$.

6. Cho biết $\sin a-\cos a=m$, hãy tính $\sin^3 a-\cos^3 a$.

BÀI 5: VẬN DỤNG ĐỊNH THỨC CỦA MẠ TRẬN VUÔNG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN VÀ ỨNG DỤNG

5.1. MA TRẬN

5.1.1. Khái niệm ma trận

Định nghĩa: Một bảng chữ nhật gồm $m \times n$ số được xếp thành m hàng, n cột như sau:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ được gọi là một *ma trận cỡ* $m \times n$.

Ma trận được viết như trên gọi là dạng tổng quát của ma trận.

Các số m, n là những số hữu hạn, nguyên dương, a_{ij} là phần tử của ma trận A nằm ở hàng thứ i và cột thứ j, $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$.

Ma trận A còn được viết dưới dạng thu gọn $A = [a_{ij}]_{mxn}$, hay $A = (a_{ij})_{mxn}$.

5.1.2. Ví dụ về mà trận và quy ước

Ví dụ 5.1. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 2x3, với các phần tử là: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = 6$.

Quy ước: Người ta quy ước, ma trận chỉ có một hàng được gọi là *ma trận hàng*, ma trận chỉ có một cột được gọi là *ma trận cột*.

Khi $m = n$, ta có ma trận có n hàng, n cột, được gọi là ma trận vuông cấp n hay ma trận cấp n.

Đường thẳng đi qua các phần tử $a_{11}, a_{22}, ..., a_{ii}, ..., a_{nn}$ của ma trận cấp n được gọi là đường chéo chính của ma trận.

Tập hợp tất cả các ma trận cấp n được ký hiệu là M_n.

Ma trận không là ma trận mà tất cả các phần tử của nó đều bằng không.

5.2. ĐỊNH THỨC

5.2.1. Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1: Cho ma trận cấp n, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Nếu bỏ đi hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A, ta thu được ma trận con cấp $(n-1)$, ký hiệu là M_{ij} và gọi nó là *ma trận con* của ma trận A ứng với phần tử a_{ij}.

Chẳng hạn, với ma trận cấp 3 có dạng: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Ta có các ma trận con cấp 2 sau:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix},\ M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ M_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix},\ M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},\ M_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix},\ M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 2: Định thức của ma trận A là một số, ký hiệu là det(A) hay $|A|$, được định nghĩa bằng phương pháp quy nạp như sau:

Nếu A là ma trận cấp 1: $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$.

Nếu A là ma trận cấp 2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, thì

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Nếu A là ma trận cấp 3: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, thì

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}).$$

Tổng quát, nếu A là ma trận cấp n thì:

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(M_{1n})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\det(M_{1j}). \qquad (1)$$

(Công thức (1) gọi là công thức khai triển định thức theo hàng 1).

Định thức của ma trận cấp n gọi là định thức cấp n. Để ký hiệu định thức, người ta dùng hai gạch đứng đặt ở hai bên bảng số:

Ví dụ 5.2. Tính các định thức:

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 2.5 = -4$.

b) $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 93 - 2.(-78) + 3.(-3) = 240.$

5.2.2. Các tính chất của định thức

Tính chất 1: $\det(A^T) = \det(A)$.

Hệ quả: *Mọi tính chất của định thức đã đúng khi phát biểu về hàng thì cũng đúng trong phát biểu ta thay hàng bởi cột.*

Tính chất 2: *Định thức đổi dấu nếu có một trong 2 điều kiện sau:*

- Đổi dấu của tất cả các phần tử của 1 hàng nào đó.

- Đổi chỗ 2 hàng nào đó cho nhau.

Tính chất 3: *Có thể khai triển định thức theo một hàng hoặc một cột bất kỳ.*

Tính chất 4: *Một định thức nếu có một hàng (hoặc một cột) toàn là số không thì bằng không.*

Tính chất 5: *Khi nhân các phần tử của một hàng hoặc một cột với cùng một số* $k \neq 0$ *thì được định thức mới gấp k lần định thức cũ.*

Ví dụ 5.3. $4.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 12 = 4.$

Hệ quả:

- Có thể rút thừa số chung của một hàng (hoặc một cột) ra khỏi định thức.

- Một định thức có hai hàng (hoặc 2 cột) tương ứng tỷ lệ thì bằng không.

Tính chất 6: *Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức đó có thể phân tích thành tổng của 2 định thức, chẳng hạn như:* $\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a'_{22} + a''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}$.

Tính chất 7: *Định thức bằng không nếu có mộthàng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (cột) còn lại.*

Tính chất 8: *Định thức không đổi nếu ta áp dụng phép biến đổi sau: cộng k lần hàng r vào hàng s, các hàng khác vẫn giữ nguyên* $(k.h_r + h_s \rightarrow h_S)$.

Tính chất 9: *Định thức của ma trận dạng tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính.*

Tính chất 10: *Nếu A, B là 2 ma trận cùng cấp thì:* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

5.2.3. Tính định thức bằng phương pháp biến đổi sơ cấp

• Các phép biến đổi sơ cấp thường dùng

Ta có thể tính định thức bằng định nghĩa hoặc áp dụng các tính chất của định thức để biến đổi đơn giản dần rồi tính. Các phép biến đổi sơ cấp đối với định thức có thể áp dụng đối với hàng hoặc với cột, và được nêu ở bảng sau:

Các phép biến đổi định thức	*Tác dụng*
Nhân một hàng (cột) nào đó với $k \neq 0$.	Định thức gấp lên k lần.
Đổi chỗ 2 hàng (cột) nào đó.	Định thức đổi dấu.
Cộng (k lần hàng r) vào hàng s (tương tự đối với cột)	Định thức không đổi.

- ***Tính định thức bằng biến đổi sơ cấp***

Bước 1: Dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa định thức về dạng tam giác trên.

Bước 2: Áp dụng tính chất 9 để tính định thức.

Ví dụ 5.4. Hãy tính các định thức sau:

a) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; b) $B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Giải:

a) $$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3.\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (\frac{1}{3}h_2 \to h_2, h_1 \to h_2, h_2 \to h_1)$$

$$= -3.\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \qquad \left(-3h_1 + h_3 \to h_3\right)$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \qquad \left(-10h_2 + h_3 \to h_3\right)$$

$$= 165.$$

b) $$B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 10 = -2.$$

5.3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

5.3.1. Các khái niệm cơ bản

- ***Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính***

Định nghĩa 1: Hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình, n ẩn có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là các ẩn số; a_{ij} là các hệ số của ẩn; b_i là các hệ số tự do.

Khi $m = n$, ta có một hệ vuông.

Khi $b_i = 0$, $\forall\ i = \overline{1, m}$, hệ (1) gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Ta gọi ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ là ma trận hệ số của hệ, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ là ma trận cột tự do và $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ là ma trận cột ẩn.

Khi đó hệ (1) viết được dưới dạng ma trận như sau: $Ax = b$.

5.3.2. Hệ Cramer và phương pháp Cramer

Định nghĩa 2: Hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn (hệ vuông) và định thức của ma trận hệ số khác không $(\det(A) \neq 0)$ gọi là hệ Cramer.

Định lý 1: *Hệ Cramer có nghiệm duy nhất* $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$*, được tính bằng công thức sau:* $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)},\ j = 1, 2, ..., n.$ *Trong đó* A *là ma trận hệ số của hệ,* A_j *là ma trận suy từ* A *bằng cách thay cột j bởi cột vế phải* B.

Ví dụ 5.5. Giải hệ $\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + .6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$

Giải: Ta có: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0$.

Thay cột *j* bởi cột *B* ta được:

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-40 \Rightarrow x_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{-40}{44}=-\frac{10}{11};$$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}=72 \Rightarrow x_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=\frac{72}{44}=\frac{18}{11};$$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=152 \Rightarrow x_3=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=\frac{152}{44}=\frac{38}{11}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $x_1=-\frac{10}{11}$, $x_2=\frac{18}{11}$, $x_3=\frac{38}{11}$.

Ví dụ 5.6. Dùng phương pháp định thức giải các hệ Cramer sau:

a). $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11. \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$ b). $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+3z=-4. \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$

Giải: a). Viết lại hệ dưới dạng ma trận: $A.X=B$, trong đó:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \mathrm{X}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, K=\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Do $\det(A)$ $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}=(32+6+6)-(-12+8-12)=60\neq 0.$

Nên hệ đã cho là hệ Cramer.

Ta có: $\Delta=\det(A)=60;$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix}=180;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix}=60;\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix}=60.$$

Ta có, hệ có nghiệm là: $x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=3; \mathrm{y}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=1; x=\frac{\Delta_3}{\Delta}=1.$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất: $(x, y, z) = (3, 1, 1)$.

b). Tương tự câu a) ta có: $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}=6\neq 0.$

$\Delta_1=6; \Delta_2=12; \Delta_3=-12.$

Vậy, hệ có nghiệm là: $(x, y, z) = (1; 2; -2)$.

5.3.3. Ứng dụng giải hệ phương trình tuyến tính trong ngành công nghệ thông tin

Để vận dung kiến thức toán vào viết phần mềm trong ngành công nghệ thông tin cần qua nhiều bước thực hiện, tuy nhiên bước quan trọng nhất là viết thuật toán cho một bài toán nào đó, rồi từ thuật toán này vận dụng kiến thức về lập trình viết ra phần mềm chạy trên hệ hệ điều hành để cho ra kết quả bài toán.

Chẳng hạn, để giải hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn trên một hệ điều hành nào đó ta cần viết ra thuật toán, điều này được trình bày trong bài 3 (chương 2) của giáo trình này.

BÀI TẬP

1. Hãy tính các định thức sau bằng nhiều cách (định nghĩa và biến đổi sơ cấp)

$$A=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{vmatrix};\qquad B=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix};\qquad C=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix};$$

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix};\qquad E=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix};\qquad F=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&a&b\\1&a&0&c\\1&b&c&0\end{vmatrix}.$$

2. Tính các định thức sau:

a) $A=\begin{vmatrix}-2&3&0\\1&-1&5\\4&2&7\end{vmatrix}$; b) $B=\begin{vmatrix}1&2&-3\\-1&-3&4\\2&1&-1\end{vmatrix}$;

c) $C=\begin{vmatrix}1&-3&1&4\\-1&5&2&-3\\2&-2&6&3\\0&2&-1&2\end{vmatrix}$; d) $A=\begin{vmatrix}2&-1&2\\3&1&5\\2&-4&3\end{vmatrix}$.

3. Cho định thức $D=\begin{vmatrix}2&m+2&4\\m&m&0\\1&2&m\end{vmatrix}$. Tìm m để $D=0$.

4. Cho định thức $D=\begin{vmatrix}2+2m&1&4\\-3&-1&-m\\3+m&1&m\end{vmatrix}$. Tìm m để $D>0$.

5. Giải phương trình $\begin{vmatrix}x&x&-1&-1\\1&x^2&-1&-1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\end{vmatrix}=0$.

6. Giải phương trình $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ -1 & -1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

7. Giải hệ các phương trình sau bằng phương pháp Cramer

a) $\begin{cases} 2x - 2y - z = -1 \\ 2y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12. \end{cases}$

8. Giải và biện luận theo các tham số các hệ sau

a) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + ay = 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = 4. \end{cases}$

CHƯƠNG 2: MỘT SỐ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC TRONG NGÀNH CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

I. Mục tiêu chương:

Sinh viên làm chủ kiến thức một số nội dung toán cơ bản về logic toán, hệ số đếm, đặc biệt là hệ đếm nhị thức được vận dung trong ngôn ngữ công nghệ thông tin, đưa ra khái niệm về thuật toán và ứng dụng của thuật toán.

II. Nội dung chương:

Sinh viên nắm được các kiến thức về logic mệnh đề, các phép toán về logic vận đề, áp dụng các định lý, tính chất cơ bản cua đại số logic để vận dụng vào ngành công nghệ thông tin, ... ; Hiểu và nắm được kiến thức về các hệ đếm: hệ đếm thập phân, hệ đếm nhị phân, hệ đếm bát phân, hệ đếm số thập lục phân. Vận dụng vào hệ thống số giải một số bài toán trong tin học; Nắm được các kiến thức về thuật toán, cách xây dựng thuật toán cho các bài toán. Từ đó, đánh giá tối ưu của từng thuật toán trong ngôn ngữ lập trình và ứng dụng phần mềm của ngành công nghệ thông tin, ...

BÀI 1: LOGIC TOÁN VÀ ỨNG DỤNG

1.1. Logic mênh đề

1.1.1. Mệnh đề

Trong toán học những khẳng định có giá trị hoặc đúng hoặc sai ta gọi những khẳng định đó là mệnh đề.

- Một mệnh đề đúng có giá trị chân lý là 1.
- Một mệnh đề sai có giá trị chân lý là 0.

Ví dụ 1.1. a) Mệnh đề "*2 là số chẵn*" có giá trị là 1

b) Mệnh đề "*Mặt trời quay quanh trái đất*" có giá trị là 0

- Tính đúng sai có thể chưa xác định hoặc không biết nhưng chắc chắn hoặc đúng hoặc sai cũng là mệnh đề. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai hoặc không thể khẳng định được tính đúng sai của nó.

Ví dụ 1.2. Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết tính đúng sai của nó.

a. Không được đi lối này! b. 7 là số nguyên tố.

c. Bây giờ là mấy giờ? d. Tôi và bạn cùng đi học.

e. Phương trình $x^2 + 2015x – 2016 = 0$ vô nghiệm.

Hướng dẫn: Câu a, c không phải là mệnh đề.

Câu b là mệnh đề đúng, câu e là mệnh đề sai, câu d là mệnh đề chưa xác định được tính đúng sai.

1.1.2. Kiến thức cơ bản về logic mệnh đề

a. Các phép toán logic cơ bản

- Các mệnh đề ký hiệu bởi các chữ cái in hoa: *A, B, C, X, Y, Z*,… chúng được gọi là các biến mệnh đề sơ cấp.

- Các mệnh đề sử dụng các liên từ: "*không*", "*và*", "*hoặc*", "*nếu* …. *thì*….." liên kết các mệnh đề sơ cấp ta gọi là mệnh đề phức hợp. Ứng với mỗi liên từ chúng ta có một phép toán logic.

- *Phép phủ định:* Phủ định của mệnh đề *A*, ký hiệu là $\overline{A}$. Bảng giá trị chân lý:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

- *Phép hội:* Là phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp *A* và *B* một mệnh đề mới, ký hiệu là *A* Ù *B* (hoặc viết gọn là *AB*). Bảng giá trị chân lý:

A	*B*	*A* Ù *B*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- *Phép Tuyển:* Là phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp *A* và *B* một mệnh đề mới. Ký hiệu là: *A* Ú *B* (hoặc viết là $A + B$).

Bảng giá trị chân lý:

A	*B*	*A* Ú *B*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- *Phép kéo theo* ("*Nếu … thì …*"): Là phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp A và B một mệnh đề mới, ký hiệu là *A* Þ *B* (đọc là nếu *A* thì *B*).

Bảng giá trị chân lý:

A	*B*	*A* Þ *B*
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- *Phép tương đương* (*còn gọi là đẳng giá):* Là phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp *A* và *B* một mệnh đề mới, ký hiệu là *A* Û *B* .

Bảng giá trị chân lý:

A	*B*	*A* Û *B*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

b. Công thức logic mệnh đề

Từ các biến mệnh đề sơ cấp, nhờ các phép toán logic cơ bản ta lập được các mệnh đề phức hợp, chúng được gọi là các công thức. Ta thường ký hiệu công thức bởi các chữ cái *F, G, H, …* Chẳng hạn công thức sau:

\+ *F* = ((*A* ∪ *B*) Þ *C*).

\+ *G* = (A Þ (*B* Þ *C*).

\+ *H* = (*AB* ∪ *B*).

c. Công thức tương đương, công thức đồng nhất đúng, đồng nhất sai

Hai công thức *F* và *G* được gọi là tương đương logic nếu chúng cùng nhận giá trị chân lý giống nhau với mọi hệ thống của các biến mệnh đề sơ cấp.

Ký hiệu: *F* = *G*.

Công thức *F* được gọi là đồng nhất đúng (hằng đúng) nếu nó nhận giá trị là 1 với mọi hệ thống giá trị của các biến mệnh đề sơ cấp, ký hiệu: F º 1.

Công thức F được gọi là đồng nhất sai (hằng sai) nếu nó nhận giá trị là 0 với mọi hệ thống giá trị của các biến mệnh đề sơ cấp, ký hiệu: F º 0.

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng:

F = *G*. Với *F* = ((*A* ∪ *B*) Þ *C*), *G* = (*A* Þ (*B* Þ *C*).

Giải: Để chứng minh hai công thức logic tương đương ta lập bảng giá trị chân lý.

A	*B*	*C*	*A* ∪ *B*	*B* Þ *C*	((*A* ∪ *B*) Þ *B*)	(*A* Þ (*B* Þ *C*)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Từ bảng chân lý ta suy ra: *F* = *G*

Ví dụ 1.4. Chứng minh các công thức logic sau là tương đương:

a). $\overline{\overline{A}} = A$.   b). $\overline{A \vee B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.   c). $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$.

d). A ∪ (B∪C) = (A∪ B) ∪ (A ∪ C).   e). $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \cup (B \Rightarrow A)$.

Giải: Ta sử dụng phương pháp lập bảng giá trị chân lý. Chẳng hạn chứng minh câu *b*, ta có bảng giá trị chân lý sau:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Từ bảng chân lý ta suy ra: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Ví dụ 1.5. Chứng minh các công thức sau là đồng nhất đúng:

a). $F = (A \cup \overline{A})$ b). $F = ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}))$

c). $G = (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ d). $F = (A \cup B \Rightarrow A)$

Giải: Để chứng minh các công thức logic là đồng nhất đúng hoặc đồng nhất sai ta sử dụng bảng giá trị chân lý, chẳng hạn ta chứng minh câu c), ta lập bảng chân lý:

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Từ bảng chân lý ta suy ra: $G \equiv 1$

* ***Quy ước bỏ dấu ngoặc:*** Thứ tự thực hiện các phép toán logic là: Phép hội, phép tuyển, phép kéo theo và phép tương đương.

Nếu có dấu phủ định trên công thức thì có thể bỏ các dấu ngoặc ở hai đầu công thức. Chẳng hạn: $\overline{(A \Rightarrow (B \wedge C))} = \overline{A \Rightarrow B \wedge C}$.

1.2. Các định lý, tính chất, hệ số cơ bản của đại số logic

1.2.1. Các định lý cơ bản

- Các định lý tương tự đại số thường

+) Luật giao hoán: $A.B = B.A;$

$A + B = B + A.$

+) Luật kết hợp: $(A + B) + C = A + (B + C)$

$(A.B).C = A.(B.C)$

+) Luật phân phối: $A.(B + C) = A.B + A.C$

- Các định lý đặc thù chỉ có trong đại số logic:

$A.A = A.$

$A + A = A$

Định luật De Mogan: $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$

$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$

Luật hàm nguyền: $\overline{\overline{A}} = A$

3.2.2. Các tính chất

- Một số đẳng thức tiện dụng ($AB = A \cup B$, $A + B = A \cup B$):

$A(B + A) = A.$

$A + AB = A.$

$AB + A\overline{B} = A.$

$A + \overline{A}B = A + B.$

$A(\overline{A} + B) = AB.$

$(A + B)(\overline{A} + B) = B.$

$(A + B)(A + C) = A + BC.$

$AB + BC + \overline{A}C = AB + \overline{A}C.$

$(A + B)(\overline{A} + C)(B + C) = (A + B)(\overline{A} + C).$

Các biểu thức này vận dụng để tinh giản các biểu thức logic, chúng không giống như đại số thông thường. Cách kiểm chứng đơn giản để chứng minh là lập bảng chân lý.

1.2.3. Các quan hệ về hệ số cơ bản

- Quan hệ giữa các hệ số:

$0.0 = 0$; $0.1 = 1.0 = 0$; $0 + 0 = 0$; $0 + 1 = 1 + 0 = 1$; $1 + 1 = 1$; $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$.

Đây là quan hệ giữa hai hằng số (0, 1), hàm tiền đề của đại số logic. Chúng là quy tắc phép toán cơ bản của tư duy logic.

- Quan hệ giữa các biến và hằng số:

$A.0 = 0$; $A.1 = A$; $A + 1 = A$; $A + 0 = A$; $A.\overline{A} = 0$; $A + \overline{A} = 1$.

3.3. Một số ứng dụng logic toán trong ngành Công nghệ thông tin

Các phép toán logic **and**, **or**, **not**, **xor** là những công cụ quan trọng trong việc thực hiện các phép toán logic cơ bản. Chúng giúp người dùng xử lý các điều kiện và lọc dữ liệu một cách linh hoạt, đáng tin cậy. Tích hợp các phép toán logic này vào công việc sẽ giúp tiết kiệm thời gian và nâng cao hiệu suất làm việc.

3.3.1. Phép toán logic AND được sử dụng trong ngữ cảnh nào?

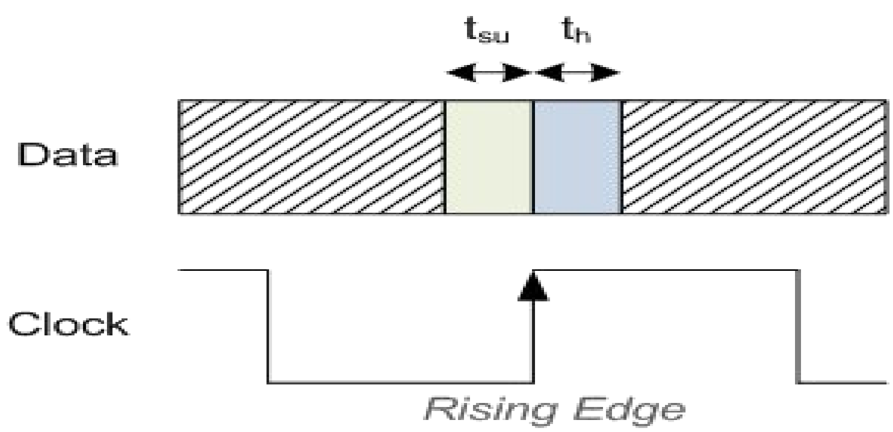
Phép toán logic AND (tương đương với phép toán "hội") là một phép toán mà chỉ trả về kết quả TRUE (có giá trị chân lý là 1) khi cả hai biểu thức hoặc giá trị được so sánh đều là TRUE. Ngược lại, nếu có ít nhất một biểu thức hoặc giá trị là FALSE (có giá trị chân lý là 0), phép toán AND sẽ trả về kết quả FALSE.

Ứng dụng phép toán AND thường được sử dụng trong nhiều ngữ cảnh khác nhau. Dưới đây là một số ví dụ:

1. Lập trình máy tính: Trong lập trình, phép toán AND thường được sử dụng để kiểm tra các điều kiện. Ví dụ, trong ngôn ngữ lập trình C, một biểu thức có thể được kiểm tra bằng cách sử dụng toán tử \"&&\", ví dụ như \"if (a > 5 && b < 10) { // do something }\". Điều này có nghĩa là đoạn mã chỉ sẽ được thực thi nếu cả hai điều kiện \"a > 5\" và \"b < 10\" đều đúng.

2. Truy vấn trong cơ sở dữ liệu: Trong truy vấn cơ sở dữ liệu, phép toán AND có thể được sử dụng để tìm kiếm các bản ghi thỏa mãn cả hai điều kiện. Ví dụ, câu truy vấn \"SELECT * FROM employees WHERE age > 25 AND salary > 5000\" sẽ trả về danh sách các nhân viên có tuổi lớn hơn 25 và lương cao hơn 5000.

3. Xử lý tín hiệu số: Trong xử lý tín hiệu số, phép toán AND thường được sử dụng để thực hiện các thao tác nhị phân trên các tín hiệu. Ví dụ, trong việc mã hóa và giải mã thông tin, phép toán AND có thể được sử dụng để kết hợp các tín hiệu để truyền tải và nhận dữ liệu. Phép toán AND là một trong các phép toán logic cơ bản và được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau để xác định sự tương quan giữa các biểu thức hoặc giá trị.



3.3.2. Phép toán logic OR được sử dụng như thế nào?

Phép toán logic OR (tương ứng với phép toán "tuyển") là một phép toán trong đại số Boolean, được sử dụng để kết hợp các giá trị logic. Khi áp dụng phép toán OR, kết quả sẽ là TRUE (đúng) nếu ít nhất một trong các biểu thức logic đưa ra đúng, và kết quả sẽ là FALSE (sai) nếu tất cả các biểu thức logic đưa ra sai.

Chẳng hạn: Giả sử chúng ta có hai biến logic A và B. Khi chúng ta áp dụng phép toán OR giữa A và B, kết quả là TRUE nếu A là TRUE hoặc B là TRUE, và kết quả là FALSE nếu cả A và B đều là FALSE.

Phép toán OR được sử dụng rộng rãi trong lập trình và trong đại số Boolean. Trong lập trình, phép toán OR thường được sử dụng để kiểm tra điều kiện, xác định đúng/sai và kết hợp các trạng thái logic.

Ví dụ trong lập trình:

```python
a = True
b = False
if a or b:
print(\"Có ít nhất một biểu thức đúng.\")
else:
print(\"Cả hai biểu thức đều sai.\")
```

Kết quả của đoạn mã trên sẽ là \"Có ít nhất một biểu thức đúng.\" vì biến A là true. Phép toán logic OR cũng được sử dụng trong các công thức điều kiện, bộ lọc dữ liệu, và xác định quyền truy cập trong các hệ thống quản lý cơ sở dữ liệu.

Ví dụ trong Excel: phép toán OR có thể được sử dụng để kiểm tra nếu một trong các điều kiện được thỏa mãn.

3.3.3. Phép toán logic NOT thực hiện như thế nào và có tác dụng gì trong việc xử lý logic?

Phép toán logic NOT (tương ứng vớp phép toán "phủ định") là một phép toán đơn giản và thường được sử dụng trong xử lý logic. Nó được sử dụng để đảo ngược giá trị của một biến logic.

Cách thực hiện phép toán NOT là đơn giản: nếu giá trị ban đầu là TRUE, thì phép toán NOT sẽ trả về FALSE, và ngược lại, nếu giá trị ban đầu là FALSE, thì phép toán NOT sẽ trả về TRUE.

Trong việc xử lý logic, phép toán NOT được sử dụng để đảo ngược giá trị của biến logic. Điều này rất hữu ích khi muốn kiểm tra xem một biểu thức logic có đúng hay không.

Ví dụ, giả sử chúng ta có biểu thức logic sau:

A = TRUE

Nếu chúng ta sử dụng phép toán NOT với biểu thức trên, kết quả sẽ là:

NOT A = FALSE

Phép toán NOT có tác dụng quan trọng trong việc xử lý logic, giúp chúng ta đảo ngược giá trị của các biến logic để kiểm tra và điều khiển các điều kiện trong các thuật toán và hệ thống logic.

3.3.4. Phép toán logic XOR được sử dụng trong trường hợp nào và mang ý nghĩa gì?

Phép toán logic XOR (tương ứng với phép toán "kéo theo"); còn gọi là phép toán \"hoặc loại trừ\") được sử dụng để xác định sự khác biệt giữa hai giá trị. Nếu hai giá trị đầu vào của phép XOR khác nhau, kết quả sẽ là TRUE (đúng), ngược lại, nếu hai giá trị đầu vào giống nhau thì kết quả sẽ là FALSE (sai).

Chẳng hạn: Giả sử chúng ta có hai biến A và B, trong đó A = True và B = False. Khi chúng ta áp dụng phép XOR giữa A và B, kết quả sẽ là TRUE, vì hai giá trị này khác nhau.

XOR thường được sử dụng trong ngữ liệu số, trong các hệ thống bảo mật và mã hóa dữ liệu, cũng như trong quyết định logic. Nó giúp tạo ra sự tương phản và phân biệt trong các bảng chân lý (truth table), nơi mà kết quả phép XOR được sử dụng để xác định một giá trị duy nhất khi hai giá trị đầu vào khác nhau.

Tóm lại, phép toán XOR được sử dụng để xác định sự khác biệt giữa hai giá trị và mang ý nghĩa về sự tương phản và phân biệt trong logic và các hệ thống mã hóa.

BÀI 2: HỆ THÔNG SỐ, CHUYỂN ĐỔI HỆ THỐNG SỐ VÀ ỨNG DỤNG

2.1. Nguyên lý của việc viết hệ cơ số.

Hệ đếm (hoặc *hệ cơ số*) là một hệ thống dùng để thể hiện các chữ số. Đây là một hệ thống các ký hiệu toán học để thể hiện các số của một tập hợp số, bằng cách sử dụng các chữ số hoặc các ký hiệu một cách nhất quán. Hệ đếm là một trong những kiến thức toán học có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực như: Điều khiển logic, lưu trữ dữ liệu, …

2.2. Hệ đếm thập phân.

2.2.1. Khái niệm.

Hệ thập phân là một hệ đếm dùng vị trí định lượng (*positional numeral system*), ký hiệu là D (10), bao gồm hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm,… Vị trí của một con số ám chỉ một phép nhân (*mũ 10*) với con số ở vị trí đó, và mỗi vị trí có giá trị gấp mười lần vị trí ở bên tay phải của nó.

Về ý nghĩa, hệ đếm thập phân sẽ sử dụng 10 số {0;1;2;3;4;5;6;7;8;9} để biễu diễn. Mọi phần tử của một số số trong hệ thập phân đều nằm trong danh sách 10 con số này.

Số thập phân A được ký hiệu là $A_{(D)}$ (hoặc $A_{(10)}$) (*được tạo bởi k chữ số trước dấu phẩy và m chữ số sau dấu phẩy*) ở hệ cơ số 10 được biểu diễn như sau:

$A_{(10)} = A_D = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + a_{k-3}10^{k-3} + \ldots + a_0 10^0 + a_{-1}10^{-1} + a_{-2}10^{-2} + \ldots + a_{-m}10^{-m}$

2.2.2. Các ví dụ.

Ví dụ 2.1. Hệ đếm thập phân được biểu diễn dạng tập hợp các chữ số.

- Số 1250 thì sử dụng bốn số đó là {1; 2; 5; 0}
- Số 2020 thì sử dụng bốn số {2; 0; 2; 0}.

Ví dụ 2.2. Cho các số thập phân sau. Hãy biểu diến số thập phân đó dưới dạng cơ số 10.

a). $467.230_{(10)} = 4.10^5 + 6.10^4 + 7.10^3 + 2.10^2 + 3.10^1 + 0.10^0 = 400000 + 60000 + 7000 + 200 + 30 + 0$

b). $1435{,}012_{(10)} = 1.\ 10^3 + 4.\ 10^2 + 3.\ 10^1 + 5.\ 10^0 + 0.\ 10^{-1} + 1.\ 10^{-2} + 2.\ 10^{-3}$

$= 1000 + 400 + 30 + 5 + 0.0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}002.$

c). $467.230{,}235_{(10)} = 4.10^5 + 6.10^4 + 7.10^3 + 2.10^2 + 3.10^1 + 0.10^0 + 2.\ 10^{-1} + 3.10^{-2} + 5.10^{-3}.$

2.3. Hệ đếm nhị phân.

2.3.1. Khái niệm.

Hệ nhị phân (hay hệ đếm cơ số hai hoặc mã nhị phân) là một hệ đếm dùng hai ký tự để biểu đạt một giá trị số, bằng tổng số các lũy thừa của 2. Hai ký tự đó thường là 0 và 1; chúng thường được dùng để biểu đạt hai giá trị hiệu điện thế tương ứng (có hiệu điện thế, hoặc hiệu điện thế cao là 1 và không có, hoặc thấp là 0).

Đặc điểm của hệ đếm cơ số hai là trong cùng một số có hai chữ số giống nhau thì chữ số bên trái có giá trị gấp 2 lần chữ số bên phải.

Ý nghĩa của Hệ cơ số 2:

- Biểu diễn bởi 2 chữ số 0 và 1.
- Số nhị phân có dạng: $A_{(2)} = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0$
- Giá trị nhị phân A (k chữ số 0 và 1) có giá trị thực ở hệ cơ số 10 được tính như sau:

$\mathbf{A_{(2)} = a_{k-1}2^{k-1} + a_{k-2}2^{k-2} + a_{k-3}2^{k-3} + \ldots + a_0 2^0}$

2.3.2. Các ví dụ.

Ví dụ 2.3. Hãy biểu diễn số nhị phân $\mathbf{101_{(2)}}$ có giá trị thực ở hệ cơ số 10.

$101_{(2)} = 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 5_{(10)}$

Ví dụ 2.4. Hãy biểu diễn số nhị phân: **0**01010101111 sang giá trị thực ở hệ cơ số 10?

$001010101111 = 0.2^{11} + 0.2^{10} + 1.2^9 + 0.2^8 + 1.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.1.2^1 + 1.2^0 = 1.2^9 + 1.2^7\ 1.2^5 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.1.2^1 + 1.2^0 = 687_{(10)}$

2.4. Hệ thống số bát phân (Octal).

2.4.1. Khái niệm

Hệ bát phân là hệ đếm cơ số 8, nghĩa là gồm các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tạo nên.

Hệ bát phân ký hiệu là: O là Octal, viết $A_{(O)} = A_{(8)}$

Giá trị bát phân $A_{(8)}$ (*gồm k chữ số tạo nên*) sang giá trị thực ở hệ cơ số 10 được tính như sau: $\mathbf{A_{(8)}=a_{k-1}8^{k-1} + a_{k-2}8^{k-2} + a_{k-3}8^{k-3} +\ldots+ a_0 8^0}$

2.4.2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.5. 346 bát phân, viết tắt là $346_{(O)}$ (*ký hiệu: O là Octal*) có giá trị thực theo hệ thập phân mà ta quen dùng như sau:

$346_{(O)} = 346_{(8)} = 3.8^2 + 4.\ 8^1 + 6.\ 8^0 = 230_{(10)}$

2.5. Hệ thống số thập lục phân.

2.5.1. Khái niệm.

Hệ thập lục phân (hay gọi hệ Hexa) ra đời để nhằm mục đích mô tả số nhị phân một cách ngắn gọn hơn. Hệ Hexa có cơ số 16 và có 16 ký hiệu. Tuy nhiên khác với hệ bát phân, hệ Hexa không có ký hiệu từ 10 đến 15 thay vào đó là các ký hiệu bằng chữ:

A, B, C, D, E, F (*A*= 10, *B*= 11, *C*= 12, *D*= 13, *E*= 14, *F*= 15)

Như vậy hệ Hexa có 16 ký hiệu để chỉ 16 số của hệ thập phân là:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.

Trong đó: số không là 0, số một là 1, số hai là 2, …, số 9 là 9, số mười là A, số mười một là B, số mười hai là C, số mười ba là D, số mười bốn là E, số mười năm là F.

$A_{(H)} = A_{(16)}$

2.5.2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.6. Hãy viết hệ số Hexa 346_H có giá trị thực sang hệ số cơ số 10 là:

$$346_{(H)} = 3.16^2 + 4.16^1 + 6.16^0 = 768 + 64 + 6 =838_{(10)}$$

Vậy số 346 hệ 16 bằng số 838 hệ thập phân.

Bảng dưới đây biểu diễn một số giá trị và các hệ của chúng.

Hệ 10 (Thập phân)	Hệ 2 (Nhị phân)	Hệ 8 (Bát phân)	Hệ 16 (Thập lục phân)
0	0_2	0_8	0_{16}
1	1_2	1_8	1_{16}
2	10_2	2_8	2_{16}
3	11_2	3_8	3_{16}
4	100_2	4_8	4_{16}
5	101_2	5_8	5_{16}
6	110_2	6_8	6_{16}
7	111_2	7_8	7_{16}
8	1000_2	10_8	8_{16}
9	1001_2	11_8	9_{16}
10	1010_2	12_8	A_{16}
11	1011_2	13_8	B_{16}
12	1100_2	14_8	C_{16}
13	1101_2	15_8	D_{16}
14	1110_2	16_8	E_{16}
15	1111_2	17_8	F_{16}
16	10000_2	20_8	10_{16}
17	10001_2	21_8	11_{16}
18	10010_2	22_8	12_{16}
19	10011_2	23_8	13_{16}
20	10100_2	24_8	14_{16}
...	...	...	...
105	1101001_2	151_8	69_{16}
106	1101010_2	152_8	$6A_{16}$
107	1101011_2	153_8	$6B_{16}$
108	1101100_2	154_8	$6C_{16}$
109	1101101_2	155_8	$6D_{16}$
110	1101110_2	156_8	$6E_{16}$

2.6. Chuyệ đổi các hệ cơ số sang thập phân và ngược lại

2.6.1. Chuyển đổi các số nhị phân, bát phân, thập lục bát phân sang hệ thập phân.

Để tính giá trị của số A_n ở hệ cơ số n (*ta chỉ xét n nhận các giá trị 2, 8, 16*) sang hệ thập phân (hệ 10) ta cần thực hiện các bước sau:

- Bước 1: đếm số lượng chữ số có trong số A_n, số này gọi là k.
- Bước 2: đánh chỉ số i của các chữ số theo thứ tự tặng dần từ phải sang trái và bắt đầu từ số 0 đến k - 1.
- Bước 3: tính giá trị thập phân của số theo công thức bên dưới, với $\mathbf{a_i}$ là chữ số ở vị trí có chỉ số **i** của $\mathbf{A_n}$

  $$\mathbf{A_n = a_{k-1} * n^{k-1} + a_{k-2} * n^{k-2} + \ldots + a_1 * n^1 + a_0 * n^0}$$

Áp dụng các bước này ta có thể chuyển các số nhị phân, bát phân và thập lục phân sang hệ thập phân.

Chẳng hạn, chuyển hệ số 2 sang hệ số 10:

Muốn chuyển đổi cơ số từ hệ nhị phân sang thập phân, ta lấy các chữ số trong phần nguyên của số cần chuyển nhân lần lượt với 2 mũ 0,1,2,3,…tăng dần từ phải qua trái. Còn phần nguyên của số cần chuyển ta sẽ nhân lần lượt với 2 mũ -1, -2, -3, … giảm dần từ phải qua trái. Phần nguyên và phần thập phân được ngăn cách nhau bằng dấu chấm “.”

Ví dụ 2.7. Chuyển $10101100.01101_{(2)}$ sang số thập phân?

1	0	1	0	1	1	0	0	.	0	1	1	0		1
7	6	5	4	3	2	1	0		-1	-2	-3	-4		-5

Áp dụng như trên ta được:

$10101100.01101_{BIN} = 1x2^7 + 0x2^6 + 1x2^5 + 0x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0 + 0x2^{-1} + 1x2^{-2} + 1x2^{-3} + 0x2^{-4} + 1x2^{-5} = 128 + 0 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0.25 + 0.125 + 0 + 0.0315 = 174.40625$

Vậy $10101100.01101_{BIN} = 174.40625_{DE}$

Ví dụ 2.8. Để chuyển số $\mathbf{11101_2}$ ở hệ nhị phân (hệ cơ số 2, có n = 2) sang hệ thập phân, ta áp dụng các bước ở trên:

- Bước 1: số 11101_2 có 5 chữ số (1, 1, 1, 0, 1) nên k = 5
- Bước 2: đánh chỉ số của các chữ số

Chữ số	1	1	1	0	1
Chữ số (i)	4	3	2	1	0

- Bước 3: tính giá trị thập phân bằng công thức bên trên, với n = 2, k = 5

  $11101_2 = 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 + 0.2^4 + 1.2^3$

  $= 1.16 + 1.8 + 1.4 + 0.2 + 1.1 = 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 29.$

  Vậy, số 11101_2 hệ nhị phân có giá trị là 29 trong hệ thập phân.

Ví dụ 2.9. Hãy chuyển đổi số nhị phân: 1010101111 sang giá trị thực ở hệ cơ số 10?

Tương tự như trên ta có: $1010101111 = 1.2^9 + 0.2^8 + 1.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.\ 1.2^1 + 1.2^0 = 1.2^9 + 1.2^7\ 1.2^5 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.\ 1.2^1 + 1.2^0 = 687_{(10)}$.

Ví dụ 1.10. Chuyển 7210_8 ở hệ bát phân (hệ cơ số 8, có n = 8) sang hệ thập phân:

- Bước 1: số 7210_8 có 4 chữ số (7, 2, 1, 0) nên k = 4
- Bước 2: đánh chỉ số của các chữ số:

Chữ số	7	2	1	0
Chỉ số (i)	3	2	1	0

- Bước 3: tính giá trị thập phân bằng công thức bên trên, với n = 8, k = 4, ta có:

  $7210_8 = 7.8^3 + 2.\ 8^2 + 1.\ 8^1 + 0.8^0 = 7.512 + 2.64 + 1.8 + 0.1 = 3584 + 128 + 8 + 0 = 3720.$

Vậy, số $\mathbf{7210_8}$ hệ bát phân có giá trị là **3720** trong hệ thập phân.

2.6.2. Chuyển đổi hệ cơ số 10 sang hệ cơ số 2

Quy tắc: Lấy số cần đổ chi cho 2 và ghi nhớ phần dư, tiếp theo lấy thương của phép chia trước chia cho 2 và ghi nhớ phần dư. Làm như vậy cho tới thương bằng 0. Đảo ngược dãy số dư ta được kết quả cần tìm.

Ví dụ 2.11. Chuyển 2371 (hệ thập phân) sang hệ nhị phân?

2371 chia 2 = 1185.5 (1185 -> dư 1)

1185 chia 2 = 592 -> dư 1

(phần nguyên)

592 chia 2 = 296 -> dư 0

296 chia 2 = 148 -> dư 0

148 chia 2 = 74 -> dư 0

74 chia 2 = 37 -> dư 0

37 chia 2 = 18 -> dư 1

18 chia 2 = 9 -> dư 0

9 chia 2 = 4 -> dư 1

4 chia 2 = 2 -> dư 0

2 chia 2 = 1 -> dư 0

1 chia 2 = 0 -> dư 1

Sắp xếp thứ tự số dư từ dưới lên trên: $2371_D = 100101000011_2$

2.6.3. Chuyển hệ số 10 sang hệ số 8

Cũng giống như cách chuyển đổi cơ số từ thập phân sang nhị phân, để chuyển từ thập phân sang bát phân ta cũng chia số cần chuyển cho 8 được phần dư (giá trị dư từ 1 → 7), sau đó cũng lấy phần nguyên chia tiếp và lấp phần dư, kết quả là phần dư được sắp xếp theo thứ tự từ dưới lên trên.

Ví dụ 2.12. Chuyển số 2764 (*hệ thập phân*) sang hệ bát phân?

2764 chia 8 = 345.5 (345 → dư 4(lấy phần lẻ chia cho 8))

345 chia 8 = 43.125 (43 → dư 1)

43 chia 8 = 5.375 (5 → dư 3)

5 chia 8 = 0 → dư 5

Sắp xếp thứ tự từ dưới lên trên: $2764_D = 5314_O$

2.6.4. Chuyển hệ số 8 sang hệ số 10

Tương tự hệ nhị phân, để chuyển đổi cơ số từ hệ bác phân sang thập phân, ta lấy các chữ số trong phần nguyên của số cần chuyển nhân lần lượt với 8 mũ 0, 1, 2, 3,… tăng dần từ phải qua trái. Còn phần nguyên của số cần chuyển ta sẽ nhân lần lượt với 8 mũ -1, -2, -3, … giảm dần từ phải qua trái.

Ví dụ 2.13. Chuyển 5314.17_O thành hệ thập phân?

5	3	1	4	.	1	7
3	2	1	0		-1	-2

$5314.17_O = 5.8^3 + 3.\ 8^2 + 1.\ 8^1 + 4.\ 8^0 + 1.\ 8^{-1} + 7.\ 8^{-2}$

$= 2560 + 192 + 8 + 4 + 0.125 + 0.109375 = 2764.234375_D$

2.6.5. Chuyển hệ số 2 sang hệ số 8

Để chuyển đổi cơ số từ hệ nhị phân sang bác phân ta gom 3 chữ số của số cần chuyển theo thứ tự lần lượt từ phải sang trái, sau đó sử dụng bảng chuyển đổi hệ đếm để chuyển đổi thành kết quả mong muốn. Nếu thiếu ta thêm số 0 vào phía trước.

Ví dụ 2.14. 100110001011010_2 = 100 110 001 011 010

= 4 6 1 3 2

Vậy $100110001011010_2 = 46132_O$

2.6.6. Chuyển hệ số 8 sang hệ số 2

Viết số nhị phân 3 Bit ứng với từng con số trong bát phân ở bảng chuyển đổi ta sẽ được kết quả chuyển đổi.

Ví dụ 2.15. Chuyển đổi số 3574_O sang số nhị phân.

Ta có:

3	5	7	4
011	101	111	100

Như vậy: $3574_O = 011\ 101\ 111\ 100_2$

2.6.7. Chuyển hệ số 16 sang hệ số 2

Ta đổ từng con số (từng chữ) hệ Hexa sang nhóm số nhị phân 4 bit tương ứng trong bảng.

Ví dụ 2.16. Chuyển số $A1C_H$ sang hệ nhị phân:

Từ bảng chuyển đổi ta có:

A	1	C
1010	0001	1100

Như vậy $A1C_H = 1010\ 0001\ 1100_2$

2.6.8. Chuyển hệ số 2 sang hệ số 16

Tương tự như trên, muốn chuyển đồi từ hệ nhị phân sang thập lục phân, ta gom 4 chữ số của số cần chuyển theo thứ tự lần lượt từ phải sang trái, sau đó sử dụng bảng 1.

Ví dụ 2.17. 100110001011010_2 = 0100 1100 0101 1010 (*nếu các số cuối cùng bên trái không đủ 4 chữ số thì mặc định ta thêm vào trước đó các chữ số 0*)

= 4 C 5 A

Vậy, $100110001011010_2 = 4C5A_H$

2.7. Các khái niệm về số

2.7.1. Khái niệm về Bit:

Từ hệ đếm ta có khái niệm sau: Bit là mỗi chữ số trong hệ nhị phân là một Bit. Chữ số đầu tiên bên trái trong dãy các hệ số hai gọi là Bit có nghĩa lớn nhất hay bit có trọng số số lớn nhất (most Significant Bit – MSB), còn Bit cuối cùng bên phải trong dãy gọi là Bit có nghĩa bé nhất hay bit có trọng số nhỏ nhất (Least Significant Bit – LSB). Chẳng hạn như dãy số trên 11111111_2 MSB là 1x 2^7, LSB là 1x2^0. Số nhị phân chỉ có Bit 0 và Bit 1, Bit là 0 thì dù ở vị trị nào cũng có giá trị là 0 vì 0 x 2^n = 0.

Vì vậy, Bit chỉ có 2 giá trị: 1 (mang giá trị đúng) hoặc 0 (mang giá trị sai)

2.7.2. Khái niệm về Byte:

Byte là số giá trị có 8 bit, do đó giá trị nhỏ nhất của Byte là 0 (0000000), và giá trị lớn nhất là 255 (11111111).

2.7.3. Khái niệm về Word:

Là số có giá trị 16 bit, do đó giá trị nhỏ nhất của Word là 0, và giá trịn lớn nhất là $2^{16} - 1$

2.7.4. Khái niệm về Double Word:

Là số có giá trị 32 bit, do đó giá trị nhỏ nhất của Word là 0, và giá trịn lớn nhất là $2^{32} - 1$.

<u>Nhận xét:</u> Từ các khái niệm trên ta thấy:

- Byte: 1 Byte = 8 Bit
- Word: 1 Word = 16 Bit
- Double word (từ kép): 1 Double word = 32 Bit

2.8. Ứng dụng số trong ngành công nghệ thông tin

Ứng dụng hệ đếm nhị phân, trong máy tính rất kho biểu thị, xử lý, lưu trữ các hệ số thập phân nhưng lại làm việc rất dễ dàng và chính xác ở hai trang thái tách biệt. Chẳng hạn: Công tắc điện chỉ có thể đóng hoặc ngắt, các linh kiện điện tử Diode, transistor có thể thông hoặc ngắt tuỳ theo dòng điện điều khiển đầu vào.

Vì vậy để biểu diễn hai trạng thái trong kỹ thuật số người ta dùng chữ số 0 và 1 (hệ nhị phân). Mỗi chữ số trong hệ nhị phân được gọi là một Bit. Do đó số nhị phân chỉ có Bit 0 và Bit 1,

Với chức năng dịch chuyển thanh ghi, các bit của biến sẽ được dịch về bên phải hay bên trái theo một giá trị xác định. Tùy theo việc dịch chuyển thanh ghi là 1 Byte, 1 word hay 1 double word mà giá trị dịch có thể tối đa là 8, 16 hay 32.

Nếu có thực hiện phép toán dịch (khác 0) thì nội dung của bit sau cùng thoát ra khỏi thanh ghi được chứa trong ô nhớ SM1.1. Còn nếu sau khi thực hiện phép dịch mà kết quả thu được của các thanh ghi là 0 thì ô nhớ SM1.0 được hệ điều hành đặt giá trị là 1.

Từ khái niệm về số ta thấy ứng dụng vào công nghệ thông tin một số vấn đề sau:

- Bit: Mỗi chữ số trong hệ nhị phân là một Bit. Chữ số đầu tiên bên trái trong dãy các hệ số hai gọi là Bit có nghĩa lớn nhất hay bit có trọng số số lớn nhất (most Significant Bit – MSB), còn Bit cuối cùng bên phải trong dãy gọi là Bit có nghĩa bé nhất hay bit có trọng số nhỏ nhất (Least Significant Bit – LSB). Chẳng hạn như dãy số trên 11111111_2 MSB là $1x\ 2^7$, LSB là $1x2^0$. Số nhị phân chỉ có Bit 0 và Bit 1, Bit là 0 thì dù ở vị trị nào cũng có giá trị là 0 vì $0 \text{ x } 2^n = 0$.

- Nibble: 1 nibble = 4 Bit
- Byte: 1 Byte = 8 Bit
- Word: 1 Word = 16 Bit
- Double word (từ kép): 1 Double word = 32 Bit

Trong máy tính ta thường gặp câu hỏi:

Windows 32bit và Window 64bit là gì? Cách phân biệt

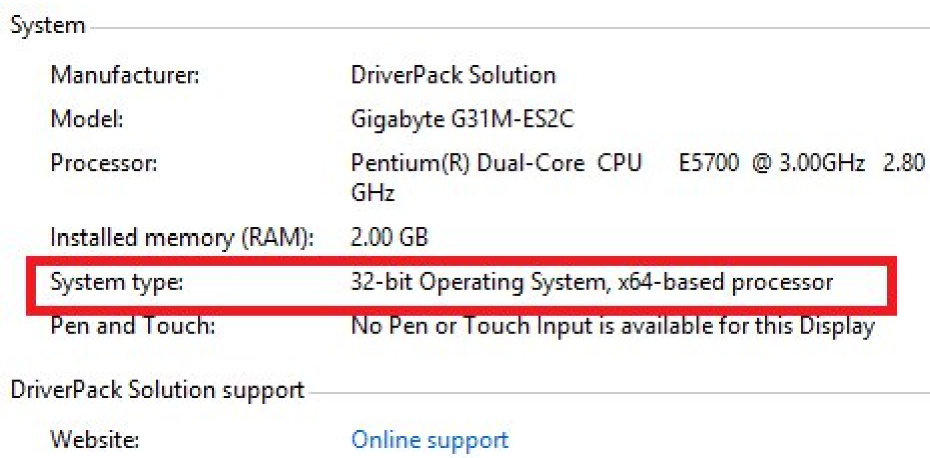
Làm sao biết được máy tính đang dùng windows 32bit hay 64bit? Khi download phần mềm, tôi thường thấy chia ra 2 phiên bản 32bit và 64bit. Vậy phân biệt như thế nào?

Trả lời:

Windows 32bit và Windows 64bit đều là hệ điều hành được cài trên máy tính. Điểm khác giữa 2 HĐH chính là Window 32bit dành cho cấu hình phần cứng nhỏ hơn 4GB Ram còn Windows 64bit có thể nhận hơn 4GB.

Để biết được bạn đang sử dụng HĐH nào, bạn có thể thực hiện theo hướng dẫn sau:

Tại giao diện *Desktop >> Chuột phải Mycomputer >> Properties*. Khi đó bạn sẽ biết HĐH mình đang sử dụng là gì?



BÀI TẬP

1. Biến đổi số nhị phân sang số thập phân, số bát phân, số thập lục phân:

a. 10110_2 b. 10001101_2 c. 100100001001_2

d. 11111010111_2 e. 10111111_2 g. 110001101_2

2. Biến đổi số thập phân sau sang số nhị phân, số bát phân

a. 45 b. 189 c. 205 d. 1089 e. 2314

3. Biến đổi các số sau sang số nhị phân

a. 47_8 b. 23_8 c. 170_8 d. 205_8

e. AF_{16} f. $1A2_{16}$ g. $BC12_{16}$ h. $E123_{16}$

Bài 3: THUẬT TOÁN VÀ ỨNG DỤNG CỦA THUẬT TOÁN

3.1. Khái niệm và tính chất của thuật toán

3.1.1. Khái niệm thuật toán

Thuật toáni là một quy tắc chính xác và đơn trị quy định một số hữu hạn những thao tác sơ cấp theo một trình tự nhất định trên những đối tượng sao cho sau một số hữu hạn bước thực hiện các thao tác đó ta thu được kết quả mong muốn.

Trong cách phát biểu trên, các thao tác sơ cấp phải gắn liền với một cơ cấu nhất định, tức là gắn liền với bộ phận làm nhiệm vụ thực hiện các thao tác đó. Cơ cấu thường gặp trong thực tế là hệ thống máy móc như: máy vi tính, máy tính bỏ túi,…

Các thao tác sơ cấp gắn liền với một cơ cấu thì đương nhiên thuật giải tương ứng cũng phải gắn liến với cơ cấu ấy.

Có thể gặp thuật toán ở khắp mọi nơi trong học tập cũng như trong đời sống. xây dựng và thực hiện đúng đắn những thuật toán là một hoạt động quan trọng của con người nói chung và đối với sinh viên học nghề nói riêng.

3.1.2. Các tính chất của thuật toán

Người ta thường liệt kê những tính chất cơ bản và quan trọng sau đây của thuật toán.

- *Tính đơn trị:* Tính đơn trị của thuật toán đòi hỏi rằng các thao tác sơ cấp phải đơn trị, nghĩa là hai phần tử thuộc cùng một cơ cấu, thực hiện cùng một thao tác sơ cấp, trên cùng một đối tượng thì phải cho cùng một kết quả.

Từ tính đơn trị, ta cũng thấy được hình thức hóa của thuật giải. Bất kể cơ cấu nào, chỉ cần biết thực hiện đúng các thao tác sơ cấp một cách hình thức theo đúng trình tự quy định là sẽ đi đến kết quả chứ không cần phải hiểu ý nghĩa của những thao tác này. Tính chất này hết sức quan trọng vì nhờ đó ta có thể giao cho những thiết bị tự động thực hiện thuật toán, làm một số việc thay thế con người.

- *Tính dừng:* Tính dừng của thuật toán yêu cầu sau một số hữu hạn lần thực hiện các thao tác sơ cấp đã chỉ ra thì thuật giải phải đi đến kết thúc.

Tính dừng giúp chúng ta luôn thu được kết quả mong muốn sau khi thực hiện thuật toán.

- *Tính đúng đắn:* Thuật toán phải đảm bảo tính đúng đắn, tức là phải giúp ta giải quyết được đúng đắn vấn đề đã đặt ra, làm được đúng công việc mà ta mong muốn.

Những điều kiện cần để cho một quy tắc là thuật toán, người ta hay nói tới hai tính chất sau đây: Tính phổ dụng là tính thường có ở nhiều thuật toán và tính hiệu quả là một phương diện mà người ta hay xem xét, đánh giá thuật toán.

- *Tính phổ dụng:* Thuật toán thường được xây dựng để giải không phải chỉ một bài toán riêng lẻ mà cho một lớp bài toán có cùng cấu trúc với những dữ liệu cụ thể khác nhau.

Nhờ tính chất này, người ta sáng tạo những thuật toán rồi từ đó xây dựng những chương trình mẫu để giải từng lớp bài toán.

- *Tính hiệu quả:* Khía cạnh đầu tiên của tính hiệu quả là tính tối ưu. Trong số nhiều thuật toán cùng giải một bái toán, hãy chọn ra thuật toán tối ưu. Tiêu chuẩn tối ưu ở đây được hiểu là:

+ Thuật toán thực hiện nhanh, tốn ít thời gian.

+ Thuật toán dùng ít giấy hoặc thiết bị lưu trữ các kết quả trung gian.

Một khía cạnh khác của tính hiệu quả là tính hiện thực. Một bài toán dù đã có thuật toán nhưng nếu ta không thể có đủ thời gian để đi đến kết quả cuối cùng thì thuật toán đó cũng ít ý nghĩa, thiếu tính hiện thực. Vì vậy, khi xây dựng một thuật toán cần cố gắng đảm bảo thời gian thực hiện nó là chấp nhận được.

3.2. Cách xây dựng thuật toán cho các bài toán

Thuật toán tồn tại dưới dạng nhiều hình thức biểu diễn khác nhau, phù hợp với cơ cấu thực hiện thuật toán. Trong môn toán và trong thực tế, người ta thường gặp những hình thức biểu diễn thuật toán sau đây: ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ toán học, sơ đồ khối, ngôn ngữ phỏng trình, các ngôn ngữ lập trình, cụ thể:

- Biểu diễn thuật toán nhờ ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ toán học: Thuật giải viết bằng ngôn ngữ tự nhiên kết hợp với ngôn ngữ toán học có ưu điểm là không chuân bị thêm kiến thức cho học sinh nhưng có nhược điểm lớn là thiếu trực quan.

- Biểu diễn thuật toán bằng sơ đồ khối: ngôn ngữ sơ đồ khối dùng để mô tả thuật toán tuy trực quan nhưng lại rất cồng kềnh khi phải mô tả những thuật giải phức tạp.

- Biểu diễn thuật toán bằng ngôn ngữ phỏng trình: Ngôn ngữ phỏng trình đơn giản, gần gũi với con người và để học vì nó sử dụng ngôn ngữ tự nhiên và chưa quá sa vào những quy ước chi tiết. Mặc khác nó cũng dễ chuyển sang những ngôn ngữ cho máy tính điện tử vì đã sử dụng một số cấu trúc và ký hiệu chuẩn hóa.

- Biểu diễn thuật toán bằng các ngôn ngữ lập trình: Có nhiều ngôn ngữ lập trình như: C^{++}, Basic, Pascal, Cobol, Prolog, …

Vận dụng quan điểm hoạt động và những tri thức về thuật toán trên ta đi xây dựng thuật toán cho các bài toán như sau:

3.2.1. Xây dựng thuật toán theo ngôn ngữ liệt kê từng bước

Xây dựng thuật toán theo ngôn ngữ liệt kê từng bước được thực hiện theo thứ tự các bước sau:

1. Thuật toán: Tên thuật toán và chức năng
2. Vào: Các dữ liệu vào
3. Ra: Các dữ liệu ra
4. Biến phụ (*nếu có*)
5. Các thao tác với các lệnh là các số tự nhiên.

Ví dụ 2.1. Để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a¹ 0), ta có thể mô tả thuật toán bằng ngôn ngữ liệt kê như sau:

Bước 1: Xác định các hệ số a, b, c

Bước 2: Kiểm tra xem hệ số a có khác 0 không?

Nếu a = 0 quay lại bước 1

Bước 3: Tính biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$

Bước 4: Nếu $\Delta < 0$ thông báo phương trình vô nghiệm và chuyển đến bước 8

Bước 5: Nếu $\Delta = 0$, tính $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ và chuyển sang bước 7.

Bước 6: Tính $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ và chuyển sang bước 7

Bước 7: Thông báo các nghiệm x_1, x_2

Bước 8: Kết thúc thuật toán.

Ví dụ 2.2. Hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình, n ẩn có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn số; a_{ij} là các hệ số của ẩn; b_i là các hệ số tự do.

Khi $m = n$, ta có một hệ vuông.

Khi $b_i = 0$, $\forall i = \overline{1, m}$, hệ (1) gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn (hệ vuông) và định thức của ma trận hệ số khác không $(\det(A) \neq 0)$ gọi là hệ Cramer. Hệ Cramer có nghiệm duy nhất $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, được tính bằng công thức sau: $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$, $j = 1, 2, \dots, n.$ Trong đó A là ma trận hệ số của hệ, A_j là ma trận suy từ A bằng cách thay cột j bởi cột vế phải B.

Hãy viết thuật toán giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất khi n = 3?

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{11}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad \text{(trong đó : } a_{ij}, b_i \in R\text{)}$$

Thuật toán giải:

Bước 1: Xác định các hệ số: $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$; $a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}$; ... $a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn}$, $b_1, b_2, b_3.$

Bước 2: Tính các định thức:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}.\, a_{22}.\, a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{12}.a_{23}\, a_{31}) - (a_{31}.\, a_{22}.\, a_{13} + a_{21}.a_{12}.a_{33} + a_{32}.a_{23}\, a_{11});$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (b_1.\, a_{22}.\, a_{33} + b_2.a_{32}.a_{13} + a_{12}.a_{23}\, b_3) - (b_3.\, a_{22}.\, a_{13} + b_2.a_{12}.a_{33} + a_{32}.a_{23}\, b_1);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}.\ b_2.\ a_{33} + a_{21}.b_3.a_{13} + b_1.a_{23}\ a_{31}) - (a_{31}.\ b_2.\ a_{13} + a_{21}.b_1.a_{33} + \ b_3.a_{23}.a_{11});$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = (a_{11}.\ a_{22}.\ b_3 + a_{21}.a_{32}.b_1 + a_{12}.b_2\ a_{31}) - (a_{31}.\ a_{22}.\ b_1 + a_{21}.a_{12}.b_3 + \ a_{32}.b_2.a_{11});$$

Bước 3: Kiểm định thức D?

Bước 4: Nếu D= 0 thông báo không xác định được nghiệm và chuyển đến bước 7

Bước 5: Nếu D $\neq 0$, tính $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ và chuyển sang bước 6.

Bước 6: Thông báo các nghiệm x, y, z.

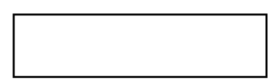
Bước 7: Kết thúc thuật toán.

Chẳng hạn, dựa vào thuật toán trên các kỹ sư công nghệ viết phần mềm cho một hệ điều hành và ứng dụng vào để giải hệ sau:

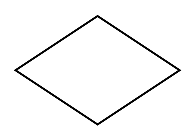
$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + .6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

- Nhập hệ số: $a_{11} = 1$; $a_{12} = 0$; $a_{13} = 2$; $a_{21} = -3$; $a_{22} = 4$; $a_{23} = 6$; $a_{31} = -1$; $a_{23} = -2$; $a_{23} = 8$; $b_1 = 6$; $b_2 =30$; $b_3 = 8$.
- Tính được: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40$;

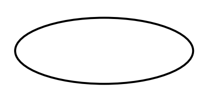
  $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72$; $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -3 & 6 & 30 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 152$.
- Vì D $\neq 0$ tính $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-40}{44} = -\frac{10}{11}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$.
- Thông báo hệ có nghiệm {x; y; z} = $\{-\frac{10}{11}; \frac{18}{11}; \frac{38}{11}\}$ và kết thúc bài toán.



Nút thao tác



Nút điều kiện



Nút khởi đầu, kết thúc

3.2.2. Xây dựng thuật toán theo sơ đồ khối

Để mô tả thuật toán bằng sơ đồ khối ta dựa vào các nút sau:

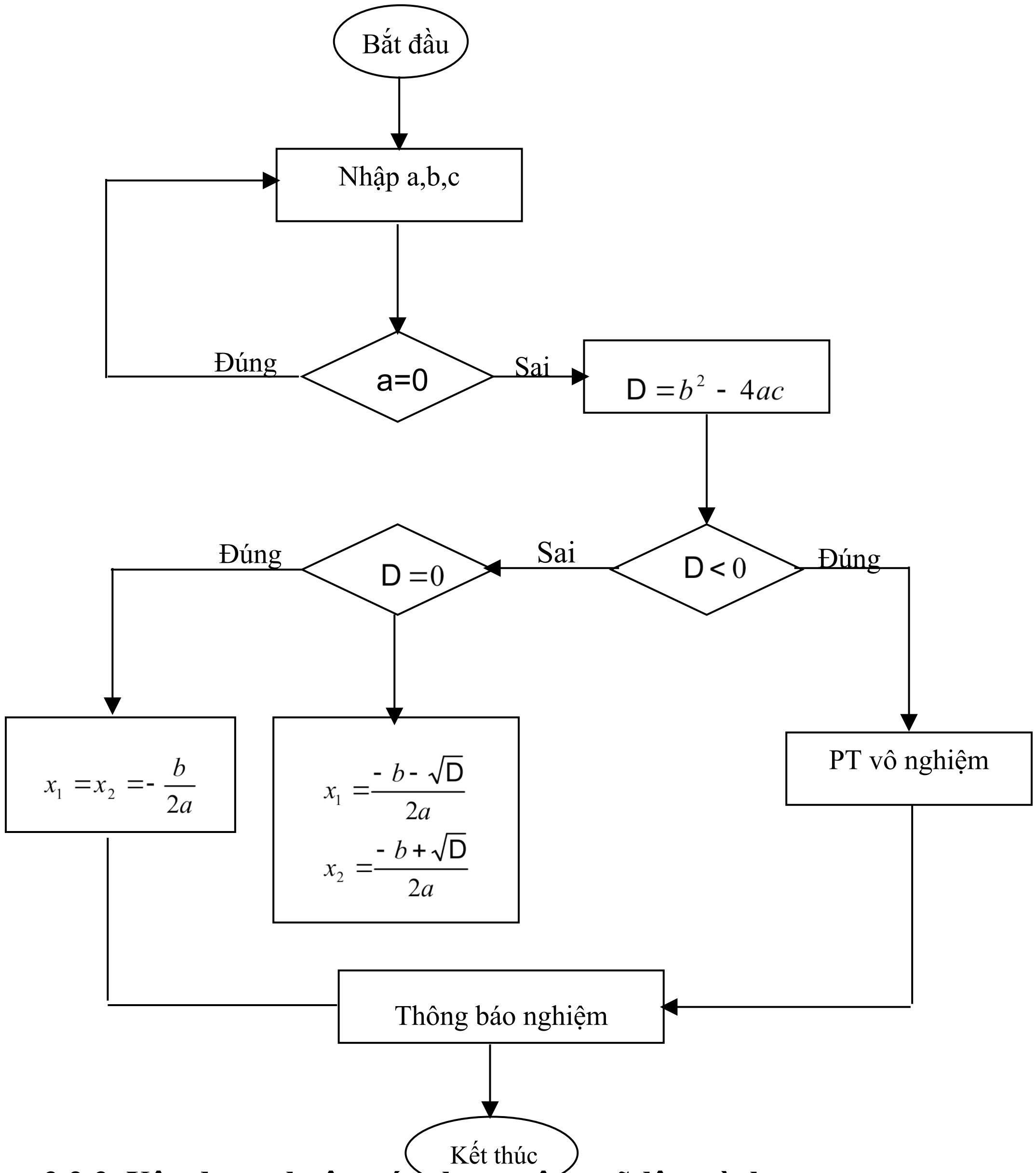
- Nút thao tác: Biểu diễn bằng hình chữ nhật, trong đó ghi câu lệnh cần thực hiện. Nếu có nhiều câu lệnh liên tiếp chúng có thể được viết chung trong một hình chữ nhật.

- Nút điều kiện: Biểu diễn bằng hình thoi trong đó ghi điều kiện cần kiểm tra trong quá trình tính toán.

- Nút khởi đầu, kết thúc: Biểu diễn bằng hình elip, thể hiện sự bắt đầu hay kết thúc của thuật toán.

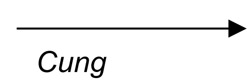
- Cung: Biểu diễn bằng đoạn thẳng có hướng dùng để chỉ đường đi của thuật toán.

Ví dụ 2.2. Để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ ta mô tả thuật toán bằng sơ đồ khối như sau:



3.2.3. Xây dựng thuật toán theo ngôn ngữ lập trình

Để giải bài toán bằng máy tính, người ta thường dùng một loại ngôn ngữ gọi là ngôn ngữ lập trình. Chẳng hạn ngôn ngữ lập trình Cobol, Algol, Pascal,... Chương trình chính là một dãy hữu hạn các câu lệnh được viết theo một quy tắc nhất định trên một ngôn ngữ lập trình nào đó.



Ví dụ 2.3. Để giải phương trình bậc hai $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ chương trình được viết bằng ngôn ngữ Pascal như sau:

Program   Giai_Phuong_trinh_bac_hai;

```
Uses Crt;
Var
        a, b, c, denta, x1, x2 : real;
Begin
Clrscr;
Write('Nhap he so:');
Repeat
        Write('a = '); readln(a);
        Write('b = '); readln(b);
        Write('c = '); readln(c);
Until a < > 0
denta: = sqr(b)-4*a*c;
If  denta <0 then
        Begin
                Write('phuong trinh vo nghiem');
                Halt;
End
        Else
                If denta = 0 then
        Begin
                Write ('phuong trinh co nghiem kep x =',-b/2*a');
Exit;
End
        Else
                Begin
                        x1: = (-b-sqrt(denta)/(2*a));
                        x2: = (-b+sqrt(denta)/(2*a));
                Writeln('phuong trinh co hai nghiem phan biet');
                Write('x1 = ', x1, ', ', x2=',x2');
Exit;
End;
Readln;
End.
```

3.3. Đánh giá tính tối ưu của thuật toán

Trong mỗi bài toán nói chung đều có nhiều cách giải khác nhau, từ các cách giải này sẽ đưa ra các thuật toán tương ứng. Vì vậy, để đánh giá tối ưu của một phần mềm chạy trên cùng một nền tảng công nghệ cần dến một thuật toán tối ưu hay nói cách khác cần lựa chọn cách giải tối ưu cho một bài toán để viết ra thuật toán tối ưu nhất.

BÀI TẬP

1. Hãy dùng các ngôn ngữ, viết thuật toán giải phương trình bậc nhất một ẩn sau:

$$ax + b = c.$$

2. Dùng ngôn ngữ liệt kê từng bước và ngôn ngữ sơ đồ khối viết thuật toán giải phương trình sau:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,\ (a \neq 0).$$

3. Hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn (hệ vuông) và định thức của ma trận hệ số khác không $(\det(A) \neq 0)$ gọi là hệ Cramer.

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$, *được tính bằng công thức sau:* $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$, $j = 1, 2, ..., n$. *Trong đó* A *là ma trận hệ số của hệ,* A_j *là ma trận suy từ* A *bằng cách thay cột j bởi cột vế phải* B.

Ứng dụng: Dùng ngôn ngữ liệt kê từng bước và ngôn ngữ sơ đồ khối viết thuật toán giải hệ phương trình sau theo phương pháp Carame khi: *n = m = 3.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Mạnh Hùng (2011), *Giáo trình toán học cao cấp (dành cho sinh viên các trường Cao đẳng kỹ thuật)*, Nhà xuất bản Lao động – Xã hội, Hà Nội.

[2]. Lê Hồng Sơn, Ngô Tất Hoạt, Nguyễn Thị Thu Nhung, Lê Thị Huệ, Trần Hải Yến, Ngô Thị Huyền (2016), *Giáo trình Toán cao cấp 1,* Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vinh.

[3], Nguyễn Đức Thành (2011), *Giáo trình bài tập Toán cao cấp (dành cho sinh viên các trường Cao đẳng kỹ thuật)*, Nhà xuất bản Lao động – Xã hội, Hà Nội.

[4], Nguyễn Đức Thành (2019), *Giáo trình Toán cơ sở (dành cho sinh viên các trường Cao đẳng kỹ thuật)*, Nhà xuất bản Lao động – Xã hội, Hà Nội.

[5]. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Lê trọng Vinh, Dương Thủy Vỹ (2005), *Giáo trình Toán học cao cấp,* Tập 1,2, Nhà xuất bản Giáo dục.

[6]. Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2000), *Toán học cao cấp* Tập 1, 2, 3, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

[7]. P.E Đankô, A.G. Pôpôp, I. Ia Côgiepnhicova, 1983, *Bài tập toán học cao cấp,* Tập 1, 2 – bản dịch tiếng Việt, Nhà xuất bản Mir Maxcơva.