MỤC LỤC

LỜI GIỚI THIỆU

Trong Chương trình giáo dục nước ta hiện nay, môn toán được coi là một môn học nền tảng. Dạy học Toán nhằm mục đích: giúp học sinh có những kiến thức, kỷ năng học toán cần thiết để áp dụng vào cuộc sống hàng ngày và học các môn học khác; phát triển tư duy toán học và kỹ năng giải quyết vấn đề; sử dụng hiệu qủa các công cụ Toán học; phát triển khả năng suy luận hợp lý; tạo điều kiện cho người học có thể giải quyết và đáp ứng sự biến đổi nhanh chóng của xã hội hiện đại.

Hầu hết, khi ứng dụng kiến thức toán học vào thực tiễn lao động sản xuất đều được thể hiện thành các con số. Việc tính toán với các con số luôn luôn được thực hiện theo một quy trình chặt chẽ, giảm thiểu các sai số và cho kết quả đáng tin cậy. Khả năng sử dụng các phương tiện kỹ thuật, hỗ trợ tính toán với dữ liệu là một phần không thể thiếu ở năng lực của Sinh viên học kỹ thuật. Việc vận dụng kiến thức toán để giải quyết các vấn đề thực tiễn trong quá trình thực hành nghề và trong lao động kỹ thuật là điều rất cần và thiết thực cho Sinh viên học kỹ thuật.

Với mục đích đó, chúng tôi biên soạn cuốn Giáo trình Toán ứng dụng cho Sinh viên hệ Cao đẳng các ngành Điện tử công nghiệp và Cơ điện tử học tập, với kiến thức học trong hai chương thời lượng từ 30 đến 45 tiết. Trong đó, Chương 1 Sinh viên được học về: tập hợp và số phức, ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính và ứng dụng; Chương 2 Sinh viên được học kiến thức về các hệ đếm: hệ đếm thập phân, hệ đếm nhị phân, hệ đếm bát phân, hệ đếm số thập lục phân, nắm được cách chuyển đổi giữa các hệ đếm, các kiến thức về logic mệnh đề, khái niệm về đại số Boole, các phép toán về đại số boole,... Vận dụng kiến thức này ứng dụng vào giải quyết một số vấn đề liên quan đến ngành điện tử công nghiệp và cơ điện tử.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu Nhà trường, Phòng Đào tạo, Khoa Cơ bản trường Cao đẳng nghề KTCN Việt Nam - Hàn Quốc đã tạo điều kiện giúp đỡ để chúng tôi hoàn thiện giáo trình.

Hy vọng rằng Giáo trình này sẽ giúp các bạn Sinh viên học tập tốt môn Toán, yêu thích môn Toán và say mê tìm tòi các vấn đề toán học áp dụng trong ngành nghề kỹ thuật.

Quá trình viết giáo trình không tránh được sự sai sót, nhóm tác giả rất mong nhận được sự góp ý của độc giả để cuốn giáo trình hoàn thiện hơn trong lần tái bản sau.

Xin chân thành cảm ơn !

Nghệ An, ngày 30 tháng 08 năm 2023.

Chủ biên

TS. Nguyễn Đức Thành

CHƯƠNG 1: TẬP HỢP VÀ SỐ PHỨC, MA TRẬN, ĐỊNH THỨC, HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Mục tiêu: Sinh viên hiểu được một số khai niệm và tính chất cơ bản về tập hợp, tập hợp số và số phức, biết vận dụng để giải toán trên tập số phức; Hiểu được thế nào là ma trận, các loại ma trận và tính chất của nó. Biết cách tính định thức của ma trận vuông, từ đó vận dụng kiến thức định thức về ma trận để giải hệ phương trình tuyến tính và vận dụng tìm thông số qua một số mạch điện trong ngành điện tử.

2. Nội dung chương: Trong chương này, Sinh viên được học về: tập hợp và số phức, ánh xạ và hàm số, giới hạn và tính liên tục của hàm số một biến số, các giá trị lượng giác, ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính và chuỗi số.

BÀI 1: TẬP HỢP VÀ SỐ PHỨC

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ TÍNH CHẤT VỀ TẬP HỢP

1.1.1. Tập hợp và phần tử của tập hợp

Tập hợp là một khái niệm nguyên thuỷ, không được định nghĩa cũng như những khái niệm điểm, đường, mặt. Ta thường nói tập hợp sinh viên của một lớp, tập hợp các điểm trong một đường tròn,… Như vậy tập hợp bao gồm các đối tượng có cùng một tính chất nào đó. Mỗi đối tượng trong tập hợp gọi là phần tử của tập hợp.

Nếu x là phần tử của tập A, ta ký hiệu: $x \in A$ (đọc là "x thuộc A"). Nếu y không phải là phần tử của tập hợp A, ta ký hiệu: $y \notin A$ (đọc là "y không thuộc A").

Ví dụ 1.1. Các tập hợp $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ là tập các số tự nhiên.

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ là tập các số nguyên.

$\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ là tập các số hữu tỉ.

$\mathbf{R} = \mathbf{Q}$ {*vô tỷ*} là tập các số thực.

1.1.2. Tập hợp con, tập rỗng, tập bằng nhau

Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng (*tập trống*), ký hiệu là $\emptyset$.

- Cho hai tập hợp A và B. Ta gọi A là tập hợp con của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, ký hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.
- Ta quy ước: Tập $\emptyset$ là tập con của mọi tập hợp.
- Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, ký hiệu $A = B$.

1.1.3. Các phép toán trên tập hợp

a) ***Phép hợp***

- Hợp của hai tập A và B là tập hợp gồm những phần tử thuộc tập A, hoặc tập hợp B, ký hiệu $A \cup B$.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ hoặc $x \in B\}$ (*hình 1.1*).

Hình 1.1

- Phép hợp có các tính chất sau:

- Tính kết hợp: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Tính giao hoán: $A \cup B = B \cup A$.

Ví dụ 1.2. Cho các tập hợp $A = \{0, 1\}$; $B = \{2, 3, 4\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) *Phép giao*

• Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm những phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B, ký hiệu $A \cap B$, xác định: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ và $x \in B\}$ (*hình 1.2*).

Hình 1.2

• Phép giao các tập hợp có các tính chất sau:

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cap B = B \cap A$

c) *Phép trừ, phần bù*

• Hiệu của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp gồm những phần tử thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập B, ký hiệu $A \backslash B$, xác định:

Hình 1.3

$A \backslash B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ (*hình 1.3*).

• Cho tập $A \subset X$. Tập hợp bù của $A \subset X$ là tập hợp $X \backslash A$, ký hiệu $\overline{A}$, xác định:

Hình 1.4

$\overline{A} = X \setminus A = \{x \in X, x \notin A\}$ (*hình 1.4*).

Ví dụ 1.3. Cho $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$

$B = \{x \mid x^2 + 4x - 5 = 0\} = \{-5, 1\}$

Khi đó: $A \cup B = \{-5, 1, 2\}$; $A \cap B = \{1\}$

$A \backslash B = \{2\}$; $(A \cup B) \backslash A = \{-5\}$.

d) *Tích Đề các của hai tập hợp*

Tích Đề-các của hai tập hợp A và B là tập hợp tất cả các cặp (a, b), $a \in A$, $b \in B$, ký hiệu AxB, xác định: $A\text{x}B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Ví dụ 1.4. Nếu $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 5\}$ thì $A\text{x}B = \{(1, 3); (1, 5); (2, 3), (2, 5)\}$

1.2. SỐ PHỨC

1.2.1. Sự mở rộng của tập hợp số

Ta biết rằng trong tập hợp số thực thì có những phương trình đại số như phương trình $x^2 + 1 = 0$ hay $x^2 = -1$ vô nghiệm vì bình phương mọi số thực đều không âm. Do đó cần phải mở rộng tập hợp số sao cho mọi phương trình đại số đều có nghiệm. Đó chính là tập hợp số phức.

1.2.2. Các khái niệm

• ***Tập số ảo:*** Số i thoả mãn điều kiện $i^2 = -1$ được gọi là đơn vị ảo.

Số thuần ảo là những số có dạng: bi, với $b \in R$, $i^2 = -1$.

Tập số ảo được xây dựng và ký hiệu như sau: $I = \{bi \setminus b \in R,\ i^2 = -1\}$.

Ví dụ 1.5. Các số $2i,\ 5i,\ -3i,\ -\frac{1}{2}i,\ \sqrt{3}i$ đều thuộc tập số ảo.

• ***Tập số phức:*** Ta gọi số phức là những số có dạng $a + bi$, với a, b là các số thực, i là đơn vị ảo. Tập số phức là tập hợp bao gồm tất cả các số phức, được ký hiệu và xác định như sau: $\mathbf{C} = \{z : z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Người ta thường dùng các chữ cái như w, u, v, z... để kí hiệu các số phức.

Nhận xét: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Ví dụ 1.6. Các số $z_1 = 1 - 2i;\ z_2 = 5 + \sqrt{2}i;\ z_3 = 0 - 7i = -7i$ đều là những số phức.

- ***Dạng đại số của số phức:*** Số phức z được biểu diễn dưới dạng $z = a + bi$ được gọi là dạng đại số của số phức, trong đó a là phần thực của z, ký hiệu là $\operatorname{Re} z$, b là phần ảo của z, ký hiệu là $\operatorname{Im} z$.

Vậy số phức z được xem là tổng đại số của một số thực và một số ảo, nghĩa là: $z = a + bi = \operatorname{Re} z + i.\operatorname{Im} z$.

Ví dụ 1.7. Biểu diễn số phức $\sqrt{4 - 3i}$ dưới dạng đại số.

Theo định nghĩa ta cần tìm số phức w sao cho $w^2 = 4 - 3i$.

Nếu $w = a + bi,\ a, b \in R$ thì $4 - 3i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$

Từ đó, ta có: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = -3. \end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $\begin{cases} a = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ b = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ và $\begin{cases} a = -\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

Vậy số $\sqrt{4 - 3i}$ có dạng đại số là: $w_{1,2} = \pm\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} i\right)$

- ***Hai số phức bằng nhau:*** Hai số phức: $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$.
- ***Số phức liên hợp:*** Số phức $\overline{z} = a - bi$ được gọi là liên hợp với số phức $z = a + bi.$
- ***Số phức đối:*** Nếu $z = a + ib$ thì $-a - ib$ gọi là số phức đối của z, kí hiệu $-z$.

Ví dụ 1.7. Cho $z = 2 + 3i \Rightarrow \overline{z} = 2 - 3i; -z = -2 - 3i.$

- ***Số phức nghịch đảo:*** số phức nghịch đảo của $z = a + bi,\ z \neq 0$ là số mà tích với z thì bằng 1, kí hiệu là $\dfrac{1}{z}$, hay z^{-1}. Nếu $z = a + bi,\ z \neq 0$ thì

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Ví dụ 1.8. Cho $z = 1 + 2i.$ Khi đó $z^{-1} = \dfrac{1 - 2i}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \dfrac{1 - 2i}{1^2 + 2^2} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5} i.$

1.2.3. Phép toán về số phức

a) ***Phép cộng:*** Cho hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$. Người ta gọi tổng của hai số phức z_1 và z_2 là số phức, kí hiệu $z_1 + z_2$. Xác định: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Phép cộng có các tính chất sau:

+ Tính kết hợp: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3$

+ Tính giao hoán: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

+ Tồn tại phần tử trung hòa: $z + 0 = 0 + z = z$. Trong đó 0 là số phức "không" $a = 0$, $b = 0$.

+ Tồn tại phần tử đối $-z$ của z sao cho $z + (-z) = 0$. Trong đó $-z$ là số số phức đối của z.

b) ***Phép trừ:*** Cho hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$. Người ta gọi hiệu của hai số phức z_1 và z_2 là một số phức, kí hiệu $z_1 - z_2$. Xác định: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Ví dụ 1.9. Cho $z_1 = 3 - 4i$; $z_2 = 1 + 2i$

Khi đó, ta có: $z_1 + z_2 = (3 + 1) + (-4 + 2)i = 4 - 2i$.

$z_1 - z_2 = (3 - 4i) + (-1 - 2i) = 2 - 6i$.

c) ***Phép nhân:*** Tính của hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$ là một số phức, được thực hiện như nhân hai nhị thức thông thường với chú ý $i^2 = -1$, kí hiệu: z_1z_2, xác định:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= a_1a_2 + ia_2b_1 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 \\ &= a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 + b_1a_2). \end{aligned}$$

Phép nhân số phức có các tính chất sau:

+ Tính kết hợp: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) = z_1z_2z_3$.

+ Tính giao hoán: $z_1z_2 = z_2z_1$.

+ Tồn tại phần tử đơn vị ký hiệu là 1 sao cho $z.1 = 1.z = z$, trong đó 1 là số phức có phần thực là 1 phần ảo là 0.

+ Nếu $z = a + ib \neq 0$ thì tồn tại phần tử nghịch đảo $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ là số phức nghịch đảo của số phức z sao cho $z.z^{-1}=1$.

d) ***Phép chia:*** Cho hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$ với $z_2 \neq 0$. Ta gọi thương của z_1, z_2 ký hiệu là $\frac{z_1}{z_2}$ được thực hiện như sau:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a^2 + b^2} - \frac{a_1b_2 + b_1a_2}{a^2 + b^2}i.$$

Ví dụ 1.10. Cho $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 1 + 3i$.

Khi đó: $z_1z_2 = (2 - 3i)(1 + 3i) = 11 + 3i$

$$\frac{z}{z_2} = \frac{2-3i}{1+3i} = \frac{(2-3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{7}{10} + \frac{9}{10}i = \frac{1}{10}(7+9i).$$

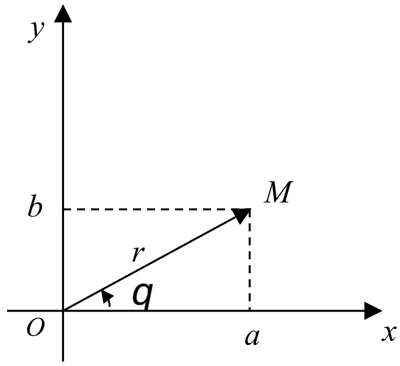
Dễ thấy rằng đối với các phép toán trên, các phép toán trên số thực là một trường hợp riêng của số phức.

1.2.4. Dạng lượng giác của số phức

a) ***Mặt phẳng phức***

Ta xét hệ trục toạ độ vuông góc Oxy và đặt tương ứng số phức $z = a + ib$ với điểm $M(a, b)$ trong mặt phẳng đó (*hình 1.5*).

Hoành độ của điểm M bằng phần thực còn tung độ M bằng phần ảo, của số phức z.



Hình 1.5

Do đó Ox gọi là trục thực, Oy là trục ảo và mặt phẳng Oxy gọi là mặt phẳng phức.

b) *Argumen và mô đun của số phức*

Cho số phức $z = a + bi$, có điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức Oxy là $M(a,b)$. Người ta gọi khoảng cách r từ M đến O là mô-đun của z, ký hiệu là $|z|$ và xác định:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Góc hợp bởi chiều dương trục thực và $\overrightarrow{OM}$ được gọi là arcgumen của số $z \neq 0$, ký hiệu là $Arg(z)$. Đối với số phức $z = 0$ arcgumen được xác định tùy ý. Khác với mô-đun, arcgumen của số phức xác định không đơn trị, nó xác định với sự sai khác một số hạng bội nguyên của 2π, và $Arg(z) = \varphi + 2k\pi,\ k \in Z$, (*hình 1.5*) trong đó $\varphi = \arg(z)$ là *giá trị chính* của acgumen được xác định bởi điều kiện:

$$-\pi < \arg(z) \le \pi \text{ hoặc } 0 \le \arg(z) < 2\pi .$$

Phần thực và phần ảo của số phức $z = a + bi$ được biểu diễn qua mô-đun và arcgumen của nó như sau: $\begin{cases} a = r\cos\varphi , \\ b = r\sin\varphi . \end{cases}$

Như vậy, arcgumen φ của số phức có thể tìm từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Hay $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$ và $\sin\varphi$ cùng dấu với b.

Chú ý 1: Khi tìm φ ta chọn góc φ sao cho $\sin\varphi$ cùng dấu với b.

c) *Dạng lượng giác của số phức*

Giả sử M là ảnh của số phức z trong mặt phẳng phức. Đặt $r = OM$; $\theta = (Ox, \overrightarrow{OM})$, r gọi là mô đun của z, θ là góc định hướng mà vectơ $\overrightarrow{OM}$ hợp với Ox, được gọi là agumen của z. Khi đó r và θ được xác định trong mục b).

Do đó, số phức $z = a + ib$ có thể viết được dưới dạng: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ gọi là dạng lượng giác của số phức z.

Vậy $z = a + ib \Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, với $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$.

Chú ý 2: - Trong khoảng $(0; 2p)$ có hai góc θ_1, θ_2 thỏa mãn: $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, nên ta chọn θ là một trong hai góc đó sao cho $\sin\theta$ cùng dấu với b.

- Argumen của $z = 0$ được xem như có giá trị bất kỳ.

Ví dụ 1.11. Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Ta có $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, do đó: $r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$.

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \theta = \dfrac{\pi}{3} \\ \theta = \dfrac{4\pi}{3} \end{array}\right. \text{ với } \theta \in (0; 2\pi).$$

Vì $\sin\dfrac{\pi}{3} > 0$ cùng dấu với $b = \sqrt{3}$ nên ta chọn $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Do đó, dạng lượng giác của số phức z là: $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 1.12. Cho số phức $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Ta có $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$. Vậy $r = 2$; với $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$ ta có: $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ hoặc $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$, $\theta \in (0; 2\pi)$. Vì $\sin\dfrac{7\pi}{6} < 0$ cùng dấu với $b = -\sqrt{3} < 0$ nên ta chọn $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$. Do đó, dạng lượng giác của số phức z là: $z = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

d) Lũy thừa với số mũ nguyên dương của số phức ở dạng lượng giác

Cho số phức $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, khi đó ta có:

$$z^2 = z.z = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$
$$z^3 = z^2.z = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

Tổng quát: $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, công thức này được gọi là công thức Moivre.

Ví dụ 1.13. Cho số phức $z = 1 - \sqrt{3}\,i$. Tính z^n, z^{12}?

Giải: Dạng lượng giác của số phức z là: $z = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$ (*ví dụ 1.12*)

Do đó: $z^n = 2^n\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)^n$

$$= 2^n\left(\cos\frac{7\pi}{6}n + i\sin\frac{7\pi}{6}n\right.$$

$$z^{12} = 2^{12}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)^{12}$$

$$= 2^{12}\left(\cos\frac{7\pi}{6}.12 + i\sin\frac{7\pi}{6}.12\right) = 2^{12}(\cos 14\pi + i\sin 14\pi) = 2^{12}.$$

e) Khai căn bậc n (n nguyên dương) của số phức

Ta gọi căn bậc n ($n \in \mathbb{N}_+$) của số phức z là một số phức mà khi nâng lên luỹ thừa bậc n thì bằng z, kí hiệu là: $\sqrt[n]{z}$, $(\sqrt[n]{z})^n = z$.

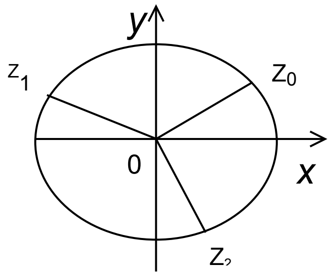
Giả sử $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ và $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Khi đó ta có: $r(\cos\theta + i\sin\theta) = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n$

$$= \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\varphi = \theta + k2\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \dfrac{\theta + k2\pi}{n}, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Cho $k = 0, 1,2,\ldots, n - 1$ ta được n giá trị khác nhau của φ. Vậy ta xác định được căn bậc n của z là: $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+k2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+k2\pi}{n}\right)$, với $k = 0, 1,2,\ldots, n - 1$.



Hình 1.6

Ví dụ 1.14. Tính $\sqrt[3]{1}$

Giải: Ta có: $1 = 1.(\cos 0 + i\sin 0)$.

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+k2\pi}{3}+i\sin\frac{0+k2\pi}{3}\right)=\cos\frac{k2\pi}{3}+i\sin\frac{k2\pi}{3},$$

với $k = 0, 1, 2$.

Cho các giá trị $k = 0, 1, 2$ ta được: $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}i.$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}i.$$

Ví dụ 1.15. Cho $z=-1+\sqrt{3}i$. Hãy chuyển z sang dạng lượng giác, tính z^5 và tính $\sqrt[3]{z}$.

Giải: Dạng lượng giác của z là: $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Do đó, ta có:

$$z^5=2^5\left[\cos\left(5\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(5\frac{2\pi}{3}\right)\right]=32\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)=32\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Khai căn bậc 3 số phức z: $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+k2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+k2\pi}{3}\right)$, với $k = 0, 1, 2$.

+ Với $k=0$, ta có: $z_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$.

+ Với $k=1$, ta có :

$$z_1=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right).$$

+ Với $k=2$, ta có:

$$z_2=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

Các số phức z_0, z_1, z_2 có cùng mô đun là $\sqrt[3]{2}$, nhưng argumen của chúng sai khác nhau một lượng là $\frac{2\pi}{3}$, các điểm biểu diễn tương ứng với chúng trên mặt phẳng phức tạo thành các đỉnh của một tam giác đều (*hình 1.6*).

BÀI TẬP

1. Cho $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Hãy viết tất cả các phần tử của các tập sau: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\times B$.

2. Cho các bất phương trình.

a) $|2x + 3| \ge 1$ b) $(x - 2)^2 \ge 4$

c) $x^2 + 2x - 8 \le 0$ d) $|x^2 + 7x - 12| \le x^2 + 7x - 12$.

Giả sử gọi tập nghiệm của bất phương trình câu a) là A; tập nghiệm của bất phương trình câu b) là B; tập nghiệm của bất phương trình câu c) là C; tập nghiệm của bất phương trình câu d) là D. Hãy xác định: $A\cup B;\ A\cap C;\ B\cap D;\ B\backslash C;\ D\backslash A$.

3. Giải phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $x^2-(1+\sqrt{3}i)x-1+\sqrt{3}i=0$;

b) $x^3+6x^2+30x+25=0$.

4. Giải các phương trình, hệ phương trình sau.

a) $|z|-z=1+2i$; b) $|z|+z=2+i$; c) $z^2+\sqrt{3}z+1=0$;

d) $3z^2-iz+1=0$; e) $z^2-2z+3=0$; f) $z^2+z-2i=0$;;

g) $\begin{cases} z_1+2z_2=1-i,\\ 3z_1-iz_2=2-3i;\end{cases}$ h) $\begin{cases}(1+i)z_1-(1-i)-(1-i)z_2=0,\\ (2+i)z_1-(1-2i)z_2=0.\end{cases}$

5. Biểu diễn các số phức sau lên mặt phẳng phức.

a) $z_1=3+5i$; b) $z_2=-6-2i$; c) $z_3=-2+6i$; d) $z_4=-4i$; e) $z_5=-3+4i$.

6. Xác định tập hợp điểm trên mặt phẳng phức z được cho bởi các điều kiện:

a) $|z|=\operatorname{Re} z+1$; b) $|z-1|\geq 2|z-i|$.

7. Tìm arcgumen của các số phức sau đây:

a) $z=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$; b) $z=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$; c) $-\sin\varphi-i\cos\varphi$.

8. Tính: a) $(1+2i)^6$ b) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$

c) $(1+i)^{25}$ d) $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i})^{20}$.

9. Chuyển các số phức sau về dạng lượng giác số phức:

a) $1-i$; b) $1+\sqrt{3}\,i$; c) $-1+\sqrt{3}\,i$;

d) $-1-\sqrt{3}\,i$; e) $1-\sqrt{3}\,i$; f) $2i$.

10. Tính căn các số phức sau:

a) $\sqrt[3]{2+2i}$; b) $\sqrt[3]{4}$; c) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$;

d) $\sqrt[3]{2-2i}$; e) $\sqrt[4]{-4}$;

11. Tính lũy thừa sau:

a) $(1+2i)^6$; b) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$; c) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$;

d) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2$; e) $(1+i)^{25}$; f) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

12. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$; b) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

13. Chứng minh rằng: $z=(1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)$ là một số thực.

14. Tìm các số thực x, y thoả mãn đẳng thức: $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.

BÀI 2: MA TRẬN, ĐỊNH THỨC, HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VÀ ỨNG DỤNG

2.1. MA TRẬN

2.1.1. Khái niệm ma trận

Định nghĩa: Một bảng chữ nhật gồm $m \times n$ số được xếp thành m hàng, n cột như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ được gọi là một *ma trận cỡ* $m \times n$.

Ma trận được viết như trên gọi là dạng tổng quát của ma trận.

Các số *m*, *n* là những số hữu hạn, nguyên dương, a_{ij} là phần tử của ma trận A nằm ở hàng thứ i và cột thứ j, $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$.

Ma trận A còn được viết dưới dạng thu gọn $A = [a_{ij}]_{mxn}$, hay $A = (a_{ij})_{mxn}$.

Ví dụ 2.1. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 2x3, với các phần tử là: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = 6$.

Người ta quy ước, ma trận chỉ có một hàng được gọi là *ma trận hàng*, ma trận chỉ có một cột được gọi là *ma trận cột*.

Khi $m = n$, ta có ma trận có n hàng, n cột, được gọi là ma trận vuông cấp n hay ma trận cấp n.

Đường thẳng đi qua các phần tử $a_{11}, a_{22}, ..., a_{ii}, ..., a_{nn}$ của ma trận cấp n được gọi là đường chéo chính của ma trận.

Tập hợp tất cả các ma trận cấp n được ký hiệu là M_n.

Ma trận không là ma trận mà tất cả các phần tử của nó đều bằng không.

2.1.2. Điều kiện để 2 ma trận bằng nhau

Định nghĩa: Hai ma trận *A* và *B* được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử tương ứng bằng nhau, ký hiệu *A* = *B*.

Giả sử $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B = [b_{ij}]_{mxn}$.

Khi đó: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$

Ví dụ 2.2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Khi đó $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 4 \\ t = -2. \end{cases}$

1.1.3. Ma trận chuyển vị

Định nghĩa 3: Ta gọi ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^T là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách chuyển hàng i của A thành cột i của A^T.

Nếu ma trận $A=[a_{ij}]_{mxn}$, có cỡ $m\times n$ thì ma trận chuyển vị $A^T=[a_{ji}]_{nxm}$ có cỡ $n\times m$.

Chú ý: Mỗi ma trận chỉ có một ma trận chuyển vị duy nhất.

Ví dụ 2.3. Cho $A=\begin{bmatrix} 4 & 1\\ 3 & 0\\ 2 & 7\end{bmatrix}$, khi đó $A^T=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 7\end{bmatrix}$.

2.1.4. Một số ma trận đặc biệt

Định nghĩa: Ma trận cấp n có dạng: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$, (nghĩa là $a_{ij}=0$ nếu $i>j$), gọi là ma trận tam giác trên.

Ma trận cấp n có dạng: $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$, (nghĩa là $a_{ij}=0$ nếu $i<j$), gọi là ma trận tam giác dưới.

Ma trận cấp n có dạng: $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_{22} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$, (nghĩa là $a_{ij}=0$ nếu $i\neq j$), gọi là ma trận chéo.

Ma trận cấp n có dạng: $I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}$, (nghĩa là $a_{ij}=0$ nếu $i\neq j$ và $a_{ij}=1$ nếu $i=j$), gọi là ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu là I_n.

Chẳng hạn ma trận $I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 3.

Ví dụ 2.4. (*Ứng dụng ma trận mô tả cấu trúc mạch điện*)

+ Ma trận nhánh – nút, trong đó số hàng là số nhánh, số cột là số nút độc lập của mạch điện, ký hiệu: $A=[a_{ij}]_{mxn}$.

$a_{ij}=1$ khi *j* là nút đầu của nhánh *i*;

$a_{ij}=-1$ khi *j* là nút cuối của nhánh *i*;

$a_{ij}=0$ trong các trường hợp khác.

Các phần tử trên một hàng của *A* cho biết nhánh đó nối giữa các điểm nào với nhau; trong mạch điện nó chỉ rõ chiều dương của dòng điện trên nhánh ấy, đồng thời cũng cho biết điện áp trên nhánh bằng hiệu số thế của cặp nút nào. Các phần tử trên một cột của một nút chỉ rõ tại nút đó có những nhánh nào đi ra khỏi nút (giá trị 1) và những nhánh nào đi vào nút (giá trị -1). Chẳng hạn:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

+ Ma trận nhánh – vòng, trong đó số hàng là số nhánh, số cột là số vòng độc lập của mạch điện, ký hiệu: $C=[c_{ij}]$.

$c_{ij}=1$ khi nhánh *i* cùng chiều vòng *j*,

$a_{ij}=-1$ nhánh *i* ngược chiều vòng *j*,

$a_{ij}=0$ nhánh *i* không thuộc vòng *j*.

Các phần tử trên mỗi hàng chỉ rõ nhánh đó có tham gia vào vòng không, thuận chiều hay ngược chiều vòng. Các phần tử trên một cột chỉ rõ vòng đó gồm những nhánh nào, cùng chiều hay ngược chiều vòng. Chẳng hạn:

$$C=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.5. Các phép toán trên ma trận

- ***Phép cộng các ma trận***

Định nghĩa: Cho hai ma trận cùng cỡ: $A=[a_{ij}]_{mxn}$, $B=[b_{ij}]_{mxn}$. Tổng $A+B$ là ma trận cỡ $m\times n$, được xác định như sau: $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{mxn}$.

Ví dụ 2.5. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4+(-3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Tính chất: Nếu các ma trận A, B, C cùng cỡ thì:

+) $A+B=B+A$. (Tính giao hoán)

+) Nếu gọi ma trận đối của $A=[a_{ij}]_{mxn}$ là $-A=[-a_{ij}]_{mxn}$ thì $A+(-A)=-A+A=0$.

+) Nếu $B=[b_{ij}]_{mxn}$ thì $A-B=\left\lfloor a_{ij}-b_{ij}\right\rfloor_{m\times n}$.

+) $A+(B+C)=(A+B)+C$. (Tính kết hợp)

- ***Nhân ma trận với một số***

Định nghĩa 2: Cho $A=[a_{ij}]_{mxn}$, $k\in R$ thì tích kA hay Ak là ma trận cỡ $m\times n$, xác định như sau: $kA=\left\lfloor ka_{ij}\right\rfloor_{m\times n}$.

Như vậy, muốn nhân ma trận với một số ta nhân tất cả các phần tử của ma trận với số đó.

Ví dụ 2.6. Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Khi đó: $3A - B = \begin{bmatrix} 9-2 & 12-7 \\ 21-0 & -6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 21 & -9 \end{bmatrix}$.

Tính chất: Dễ dàng chứng minh được:

+) $k(A+B) = kA + kB$;

+) $(k+h)A = kA + hA$;

+) $k(hA) = (kh)A$;

+) $0A = O$. (*nhân ma trận* A *với số 0 ta được ma trận không*).

- ***Phép nhân ma trận với ma trận***

Định nghĩa: Cho 2 ma trận $A = [a_{ij}]_{mxp}$, $B = [b_{ij}]_{pxm}$, (số cột của ma trận *A* bằng số hàng của ma trận *B*). Người ta gọi tích $A.B$ là ma trận $C = [c_{ij}]_{mxn}$, có m hàng, n cột mà phần tử c_{ij} được xác định như sau: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$, với $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

Ví dụ 2.7. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+2.3+3.1 & 1.2+2.2+3.4 \\ 4.1+1.3+2.1 & 4.2+1.2+2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.4 \\ 2.1 & 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

Chú ý: Từ điều kiện tồn tại phép nhân *A.B* (số cột của ma trận *A* bằng số hàng của ma trận *B*) dẫn đến, sẽ có trường hợp tồn tại phép nhân *A.B* nhưng không tồn tại phép nhân ngược lại *B.A*. Do đó, phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán.

Tính chất:

+) $A.(B+C) = A.C + B.C$;

+) $(B+C).A = B.A + C.A$;

+) $k.(B.C) = (kB).C = B(k.C)$;

+) $(A.B)^T = B^T.A^T$.

+) $I.A = A.I = A$.

2.2. ĐỊNH THỨC

2.2.1. Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1: Cho ma trận cấp n, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Nếu bỏ đi hàng thứ *i* và cột thứ *j* của ma trận A, ta thu được ma trận con cấp $(n-1)$, ký hiệu là M_{ij} và gọi nó là *ma trận con* của ma trận A ứng với phần tử a_{ij}.

Chẳng hạn, với ma trận cấp 3 có dạng: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Ta có các ma trận con cấp 2 sau:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix},\ M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ M_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix},\ M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},\ M_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix},\ M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 2: Định thức của ma trận A là một số, ký hiệu là det(A) hay $|A|$, được định nghĩa bằng phương pháp quy nạp như sau:

Nếu A là ma trận cấp 1: $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$.

Nếu A là ma trận cấp 2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, thì

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Nếu A là ma trận cấp 3: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, thì

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}).$$

Tổng quát, nếu A là ma trận cấp n thì:

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\det(M_{1j}). \qquad (1)$$

(Công thức (1) gọi là công thức khai triển định thức theo hàng 1).

Định thức của ma trận cấp n gọi là định thức cấp n. Để ký hiệu định thức, người ta dùng hai gạch đứng đặt ở hai bên bảng số:

Ví dụ 2.8. Tính các định thức:

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 2.5 = -4$.

b) $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 93 - 2.(-78) + 3.(-3) = 240.$

2.2.2. Các tính chất của định thức

Tính chất 1: $\det(A^T) = \det(A)$.

Hệ quả: *Mọi tính chất của định thức đã đúng khi phát biểu về hàng thì cũng đúng trong phát biểu ta thay hàng bởi cột.*

Tính chất 2: *Định thức đổi dấu nếu có một trong 2 điều kiện sau:*

- Đổi dấu của tất cả các phần tử của 1 hàng nào đó.

- Đổi chỗ 2 hàng nào đó cho nhau.

Tính chất 3: *Có thể khai triển định thức theo một hàng hoặc một cột bất kỳ.*

Tính chất 4: *Một định thức nếu có một hàng (hoặc một cột) toàn là số không thì bằng không.*

Tính chất 5: *Khi nhân các phần tử của một hàng hoặc một cột với cùng một số* $k \neq 0$ *thì được định thức mới gấp k lần định thức cũ.*

Ví dụ 2.9. $4.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 12 = 4.$

Hệ quả:

- Có thể rút thừa số chung của một hàng (hoặc một cột) ra khỏi định thức.

- Một định thức có hai hàng (hoặc 2 cột) tương ứng tỷ lệ thì bằng không.

Tính chất 6**:** *Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức đó có thể phân tích thành tổng của 2 định thức, chẳng hạn như:*
$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a'_{22} + a''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}.$

Tính chất 7: *Định thức bằng không nếu có mộthàng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (cột) còn lại.*

Tính chất 8: *Định thức không đổi nếu ta áp dụng phép biến đổi sau: cộng k lần hàng r vào hàng s, các hàng khác vẫn giữ nguyên* $(k.h_r + h_s \to h_s)$.

Tính chất 9: *Định thức của ma trận dạng tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính.*

Tính chất 10: *Nếu A, B là 2 ma trận cùng cấp thì:* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

2.2.3. Tính định thức bằng phương pháp biến đổi sơ cấp

• Các phép biến đổi sơ cấp thường dùng

Ta có thể tính định thức bằng định nghĩa hoặc áp dụng các tính chất của định thức để biến đổi đơn giản dần rồi tính. Các phép biến đổi sơ cấp đối với định thức có thể áp dụng đối với hàng hoặc với cột, và được nêu ở bảng sau:

Các phép biến đổi định thức	*Tác dụng*
Nhân một hàng (cột) nào đó với $k \neq 0$.	Định thức gấp lên k lần.
Đổi chỗ 2 hàng (cột) nào đó.	Định thức đổi dấu.
Cộng (k lần hàng r) vào hàng s (tương tự đối với cột).	Định thức không đổi.

• Tính định thức bằng biến đổi sơ cấp

Bước 1: Dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa định thức về dạng tam giác trên.

Bước 2: Áp dụng tính chất 9 để tính định thức.

Ví dụ 2.10. Hãy tính các định thức sau:

a) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;   b) $B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Giải:

a) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3.\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (\frac{1}{3}h_2 \to h_2, h_1 \to h_2, h_2 \to h_1)$

$$= -3.\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \qquad \left(-3h_1 + h_3 \to h_3\right)$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \qquad \left(-10h_2 + h_3 \to h_3\right)$$

$$= 165.$$

b) $B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 10 = -2.$$

2.3. HẠNG CỦA MA TRẬN

2.3.1. Hạng của ma trận

Xét ma trận cỡ $m \times n$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Đặt p là một số nguyên dương, $p \le \min(m,n)$.

Định nghĩa 1: Ma trận vuông cấp p suy từ A bằng cách bỏ đi $m-p$ hàng và $n-p$ cột gọi là ma trận con cấp p của A.

Định thức của ma trận con đó được gọi là định thức con cấp p của A.

Định nghĩa 2: Hạng của ma trận A là một số, ký hiệu $r(A)$, là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A.

Ví dụ 2.11. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Trước hết ta xét các định thức con cấp 3 của ma trận A:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Nhận thấy tất cả các định thức con cấp 3 của A đều bằng 0. Vì vậy xét tiếp các định thức con cấp 2, ta thấy tồn tại định thức con cấp 2 sau: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

Vậy theo định nghĩa, ta có $r(A) = 2$.

Chú ý: + $r(A^T) = r(A)$.

+ Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ thì $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

2.3.2. Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp biến đổi sơ cấp

- ***Định nghĩa*** (*ma trận dạng bậc thang*). Một ma trận cỡ mxn có 2 tính chất sau được gọi là ma trận dạng bậc thang:

- Các hàng khác không (tức là tồn tại phần tử của hàng khác không) luôn ở trên các hàng bằng không.

- Trên hai hàng khác không thì phần tử khác không đầu tiên ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.

Chẳng hạn, các ma trận sau có dạng bậc thang.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

- ***Tìm hạng của một ma trận bằng phương pháp biến đổi sơ cấp.*** Áp dụng các phép biến đổi về hàng để biến đổi ma trận đó về ma trận dạng bậc thang. Khi đó số hàng khác không của ma trận dạng bậc thang đó chính là hạng của ma trận đã cho.

Ví dụ 2.12 Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Giải: $A \xrightarrow{-2h_1+h_2 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{5}{7}h_2+h_3 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Ma trận cuối cùng này là một ma trận dạng bậc thang có hai hàng khác không.

Vậy $r(A) = 2$.

2.4. Ma trận nghịch đảo

2.4.1. Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1: Xét ma trận A cấp n. Nếu tồn tại ma trận B sao cho: $A.B = B.A$, thì ta nói A khả đảo và gọi B là ma trận nghịch đảo của A. Người ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}, nghĩa là: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Định lý 1: *Nếu ma trận A cấp n có ma trận nghịch đảo thì ma trận nghịch đảo đó là duy nhất.*

2.4.2. Sự tồn tại ma trận nghịch đảo và phương pháp định thức để tìm ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 2: Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$. Gọi M_{ij} là các ma trận con tương ứng với các phần tử a_{ij}.Người ta gọi phần phụ đại số của phần tử a_{ij} là một số, được ký hiệu là c_{ij} và tính như sau: $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.

Vậy phần phụ đại số của a_{ij} có giá trị bằng định thức $\det(M_{ij})$ nếu $(i+j)$ là chẵn, và bằng số đối của $\det(M_{ij})$ nếu $(i+j)$ là lẻ .

Định lý 2: *Nếu A là ma trận cấp n, có $\det(A)\neq 0$ thì tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} được xác định bởi công thức sau:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.C^T = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1n} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Chú ý: Điều ngược lại của định lý vẫn đúng.

Sử dụng khái niệm phần phụ đại số người ta cũng có thể viết công thức khai triển định thức cấp n một cách rất gọn như sau:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}. \quad (\textit{Khai triển định thức A theo hàng thứ i})$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij}. \quad (\textit{Khai triển định thức A theo cột thứ j})$$

Ví dụ 2.13. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Hãy tìm A^{-1} bằng phương pháp định thức.

Bước 1: Do $\det(A) = -1 \neq 0$ nên tồn tại A^{-1}.

Bước 2: Tính các phần phụ đại số c_{ij} ứng với các phần tử a_{ij}:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40;\ c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13;\ c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5;$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16;\ c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5;\ c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9;\ c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3;\ c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Bước 3: Lập ma trận C rồi tìm chuyển vị của nó là C^T

Ta có: $C = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Bước 4 : Theo (1) ta có: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} C^T = -\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

2.4.3. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp biến đổi sơ cấp

Các phép biến đổi sơ cấp về hàng thường dùng đối với một ma trận như sau:

a) Nhân hàng r với một số $\lambda \neq 0$;

b) Đổi chỗ 2 hàng r và s nào đó cho nhau;

c) Cộng k lần hàng r nào đó vào hàng s.

Lược đồ giải: Viết ma trận đơn vị cùng cấp vào bên phải ma trận A, ký hiệu là $\left[A, I\right]$, áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa dần ma trận này về dạng $\left[I, B\right]$, khi đó ma trận B chính là ma trận A^{-1}.

Ví dụ 2.14. Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Ta có lời giải bài toán đã cho như sau:

$$\left[A, I\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\xrightarrow{\substack{-2h_1 + h_2 \to h_2 \\ -h_1 + h_3 \to h_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2h_2 + h_3 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-h_3 \to h_3 \\ 3h_3 + h_2 \to h_2 \\ -3h_3 + h_1 \to h_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2h_2 + h_1 \to h_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vậy $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

2.5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.5.1. Các khái niệm cơ bản

- ***Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính***

Định nghĩa 1: Hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình, n ẩn có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là các ẩn số; a_{ij} là các hệ số của ẩn; b_i là các hệ số tự do.

Khi $m = n$, ta có một hệ vuông.

Khi $b_i = 0$, $\forall i = \overline{1,m}$, hệ (1) gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

• ***Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính***

Ta gọi ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ là ma trận hệ số của hệ, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ là ma trận cột tự do và $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ là ma trận cột ẩn.

Khi đó hệ (1) viết được dưới dạng ma trận như sau: $Ax = b$.

2.5.2. Hệ Cramer và phương pháp Cramer

Định nghĩa 2: Hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn (hệ vuông) và định thức của ma trận hệ số khác không $(\det(A) \neq 0)$ gọi là hệ Cramer.

Định lý 1: *Hệ Cramer có nghiệm duy nhất $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$, được tính bằng công thức sau: $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$, $j = 1, 2, ..., n$. Trong đó A là ma trận hệ số của hệ, A_j là ma trận suy từ A bằng cách thay cột j bởi cột vế phải B.*

Ví dụ 2.15. Giải hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + .6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$

Giải: Ta có: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0$.

Thay cột *j* bởi cột *B* ta được:

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40 \Rightarrow x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = -\frac{10}{11};$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72 \Rightarrow x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11};$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 152 \Rightarrow x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $x_1 = -\dfrac{10}{11}$, $x_2 = \dfrac{18}{11}$, $x_3 = \dfrac{38}{11}$.

Ví dụ 2.16. Dùng phương pháp định thức giải các hệ Cramer sau:

a). $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11. \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ b). $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 3z = -4. \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$

Giải: a). Viết lại hệ dưới dạng ma trận: $A.X = B$, trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Do det(A) $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (32 + 6 + 6) - (-12 + 8 - 12) = 60 \neq 0.$

Nên hệ đã cho là hệ Cramer.

Ta có: $\Delta = \det(A) = 60;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60.$$

Ta có, hệ có nghiệm là: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 3; \mathrm{y} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1; x = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất: $(x, y, z) = (3, 1, 1)$.

b). Tương tự câu a) ta có: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$

$\Delta_1 = 6; \Delta_2 = 12; \Delta_3 = -12.$

Vậy, hệ có nghiệm là: $(x, y, z) = (1; 2; –2)$.

2.5.3. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phép biến đổi sơ cấp (phương pháp Gauss)

- ***Lược đồ giải hệ bằng phương pháp Gauss***

Cho hệ phương trình tuyến tính dạng: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$

Ta biểu diễn hệ đã cho dưới dạng ma trận là $AX = B$.

Định nghĩa 3: Người ta gọi hệ phương trình tuyến tính có dạng sau là hệ tam giác trên:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n , \end{cases} \qquad (2)$$

vì ma trận hệ số của hệ (2) là ma trận dạng tam giác trên. Nên giải hệ (2) rất đơn giản, chỉ cần giải phương trình cuối rồi thế dần lên.

Lược đồ giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss:

Bước 1: Gọi $\overline{A} = [A\ B]$ là ma trận bổ sung của hệ, bằng cách viết cột B vào bên phải ma trận A.

Bước 2: Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để biến đổi ma trận $\overline{A}$ về dạng tam giác trên.

Bước 3: Khi đó nghiệm của hệ tam giác trên thu được cũng chính là nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 2.17. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Giải: Ta trình bày quá trình giải hệ này vào một bảng, gọi là bảng Gauss sau:

Bảng	Ma trận $\overline{A}$				Chú thích
I	2	4	3	4	h_1
	3	1	-2	-2	h_2
	4	11	7	7	h_3
II	2	4	3	4	h_1
	0	-5	-6,5	-8	$(-3/2)h_1 + h_2 \to h_2$
	0	3	1	-1	$-2h_1 + h_3 \to h_3$
III	2	4	3	4	h_1
	0	-5	-6,5	-8	h_2
	0	0	-2,9	-5,8	$(3/5)h_2 + h_3 \to h_3$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ tam giác trên là: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ -5x_2 - 6{,}5x_3 = -8 \\ -2{,}9x_3 = -5{,}8. \end{cases}$

Từ phương trình cuối của hệ trên, ta có: $2{,}9x_3 = 5{,}8 \Rightarrow x_3 = 2$.

Thay vào phương trình thứ 2 của hệ tam giác trên ta có:

$$5x_2 + 13 = 8 \Rightarrow x_2 = -1.$$

Thay $x_3 = 2, x_2 = -1$ vào phương trình đầu của hệ tam giác trên ta có $x_1 = 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là : (1 ; –1 ; 2).

- ***Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính tổng quát***

Cho hệ phương trình tuyến tính tổng quát m phương trình, n ẩn :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases} \qquad (3)$$

Dạng ma trận của hệ (3) là: $A_{m\times n}X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$.

Xét ma trận bổ sung của hệ: $\overline{A} = [A, B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$.

Định lý sau đây sẽ xác định tính tồn tại nghiệm của hệ đã cho.

Định lý 2: *(Định lý Kronecker-Capelli)***.** *Hệ phương trình tuyến tính (3) có nghiệm khi và chỉ khi* $r(A) = r(\overline{A})$.

Hệ quả: *- Khi* $r(A) \neq r(\overline{A})$ *thì hệ vô nghiệm .*

- Khi $r(A) = r(\overline{A}) = n$ *(n là số ẩn) thì hệ có nghiệm duy nhất.*

- Khi $r(A) = r(\overline{A}) = r < n$ *thì hệ có vô số nghiệm.*

Ví dụ 2.18. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$. Xác định các giá trị a, b để hệ đã cho:

a) có nghiệm duy nhất.

b) có vô số nghiệm.

c) vô nghiệm.

Giải: Lập ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[-2h_1 + h_3 \to h_3]{-3h_1 + h_2 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -7 & -4a & -7 \\ 0 & -3 & 3-2a & b-6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-h_2 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 7 & 4a & 7 \\ 0 & -3 & 3-2a & b-6 \end{bmatrix} \xrightarrow{2h_3 + h_2 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 2b-5 \\ 0 & -3 & 3-2a & b-6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3h_2 + h_3 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 2b-5 \\ 0 & 0 & 21-2a & 7(b-3) \end{bmatrix}.$$

a) Để hệ có nghiệm duy nhất thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3 \Leftrightarrow 21 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{21}{2}$ với giá trị của b bất kỳ.

b) Để hệ vô số nghiệm thì $r(A) = r(\overline{A}) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{21}{2}, \\ b = 3. \end{cases}$

c) Để hệ đã cho vô nghiệm thì $r(A) \neq r(\overline{A}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{21}{2}, \\ b \neq 3. \end{cases}$

Chú ý: Trong trường hợp hệ có vô số nghiệm, ta cần tìm công thức nghiệm tổng quát của hệ như sau: Thay giá trị $a = \frac{21}{2}, b = 3$ vào hệ, khi đó hệ phương trình tuyến tính đã cho tương đương với hệ chỉ gồm 2 phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dfrac{21}{2}x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - \dfrac{21}{2}x_3 = 2. \end{cases}$$

Cho x_3 tùy ý ta có : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 - \dfrac{21}{2}x_3, \\ 3x_1 - x = 2 + \dfrac{21}{2}x_3. \end{cases}$

Vậy khi $\begin{cases} a = 21/2 \\ b = 3 \end{cases}$ hệ có vô số nghiệm là: $\begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{3}{4}x_3, \\ x_2 = 1 - 6x_3, \\ x_3 \in R. \end{cases}$

2.6. Ứng dụng giải một số bài toán trong dòng điện mạch điện tử

2.6.1. Phương pháp dòng điện nhánh

Phương pháp này ứng dụng trực tiếp 2 định luật Kiếcchốp (Kichhoff) 1 và 2 để viết các phương trình nút và dòng.

Bước 1: Xem xét cấu trúc của mạch điện. Tìm mạch điện có bao nhiêu nút và bao nhiêu vòng. Giả sử có n nút, m vòng.

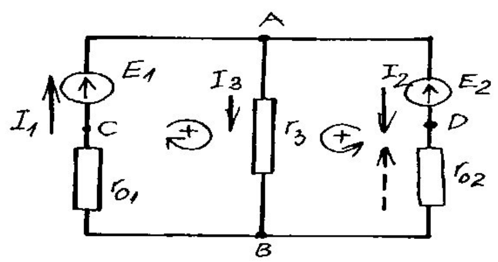
Bước 2**:** Trên mỗi nhánh của mạch điện ký hiệu một dòng điện và chọn chiều của dòng điện đó.

Bước 3**:** - Viết phương trình Kiếcchốp 1 cho (n - 1) nút đã chọn.

- Viết phương trình Kiếcchốp 2 cho M = m - (n - 1) mạch vòng độc lập.

Bước 4: Lập và giải hệ phương trình gồm m phương trình để giải bài toán có m ẩn là các dòng điện nhánh trong mạch điện. Nếu dòng điện nhánh nào có giá trị âm thì chiều dòng điện thực tế sẽ ngược với chiều đã chọn ban đầu.

<u>Ứng dụng 1</u>: Cho mạch điện như hình vẽ, có E_1 = 125V; E_2 = 90V; r_{01} = 3 **Ω**; r_{02} = 2**Ω**; r_3 = 4**Ω**. Tìm dòng điện trong các nhánh?



Giải :

Bước 1. Qua hình vẽ ta thấy mạch có m = 3 nhánh, n = 2 nút.

Bước 2. Chọn chiều dòng điện các nhánh I_1, I_2, I_3 như hình vẽ.

Bước 3. Thiết lập hệ phương trình dòng nhánh

+ Theo định luật Kiếcchốp 1 cho (n - 1) = 1 nút:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad (1)$$

+ Theo Kiếcshốp 2 cho M = m - (n - 1) = 2 mạch vòng độc lập.

$$E_1 = I_1.r_{01} + I_3.r_3 \qquad (2)$$

$$E_2 = I_2.r_{02} + I_3.r_3 \qquad (3)$$

Sau khi thiết lập hệ phương trình.

Bước 4: Giải hệ 3 phương trình (1), (2), (3) theo phương pháp carame ?

2.4.2. Phương pháp dòng điện vòng

Để khắc phục nhược điểm của phương pháp dòng điện nhánh. Giới thiệu phương pháp mới: phương pháp dòng điện vòng. Tinh thần chủ yếu của phương pháp là dùng các ẩn số trung gian là các dòng điện vòng để thiết lập hệ phương trình. Tìm dòng điện nhánh theo dòng điện vòng (Dòng điện vòng là dòng điện quy ước chạy xung quanh khép kín qua một vòng).

Phương pháp:

Bước 1: Xem xét cấu trúc của mạch điện. Tìm mạch điện có bao nhiêu nút và bao nhiêu vòng . Giả sử có n nút, m nhánh.

Bước 2: Chọn m-n+1 vòng khác nhau hợp lý (nên chọn các vòng nhỏ). Ký hiệu dòng điện vòng trên mỗi vòng và chọn chiều của nó

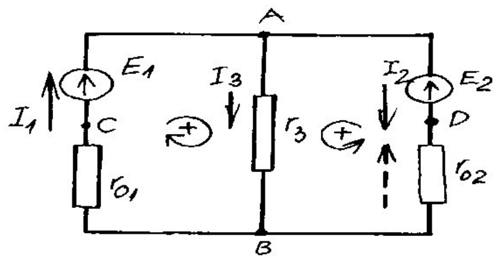
Bước 3: Tính các dòng điện nhánh theo dòng điện vòng.

- Nếu nhánh chỉ có 1 dòng vòng đi qua thì dòng nhánh bằng dòng vòng.
- Nếu nhánh có 2 hoặc hơn 2 dòng vòng đi qua, dòng nhánh sẽ bằng tổng đại số các dòng vòng đó.

Bước 4: Lập và giải hệ phương trình KH2 gồm m-n+1 phương trình cho m-n+1 vòng đã chọn (trước tiên viết theo dòng điện nhánh, sau viết lại theo dòng điện vòng như bước 3) với ẩn số là các dòng điện vòng.

Bước 5: Tính dòng điện nhánh theo dòng vòng (công thức ở bước 3)

Ứng dụng 2: Cho mạch điện như hình vẽ, có E_1 = 125V; E_2 = 90V; r_{01} = 3**Ω**; r_{02} = 2**Ω**; r_3 = 4**Ω**. Tìm dòng điện trong các nhánh.



Giải:

Bước 1: Mạch có 3 nhánh, 2 nút: m=3, n=2

Bước 2: Kí hiệu và chọn chiều như hình vẽ

Bước 3: $I_1 = I_{v1}$; $I_2 = -I_{v2}$; $I_3 = I_{v1} + I_{v2}$

Bước 4: Lập hệ phương trình:

$$r_{01}.I_{v1} + r_{03}.(I_{v1} + I_{v2}) = E_1 \quad (1)$$

$$-r_{02}.I_{v2} + r_{03}.(I_{v1} + I_{v2}) = E_2 \quad (2)$$

Bước 5: Giả hệ phương trình (1) và (2), tìm I_{v1}, I_{v2} và từ đó suy ra I_1, I_2, I_3 ?

<u>Yêu cầu bài tập</u>: *Thực hiện và tính toán ở* <u>bước 4</u> *(ứng dụng 1) và* <u>*Bước 5*</u> *(ứng dụng 2).*

BÀI TẬP

1. Cho 2 ma trận sau: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Tồn tại hay không tích $A.B$ và $B.A$. Nếu tồn tại hãy tính các tích đó.

2. Cho các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Tính: a) $3A - 2B - C$.

b) $2A + 4B - 3C$.

3. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Tính a) $3A + B^T$.

b) $2A^T + 3B$.

4. Tìm các ma trận X thoả mãn các phương trình

a) $3A + 2X = I$, với $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ và I là ma trận đơn vị cấp 3.

b) $2A - 3X = B$, với $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Hãy tính các định thức sau bằng nhiều cách (định nghĩa và biến đổi sơ cấp)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}; \quad F = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Tính các định thức sau:

a) $A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$; b) $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

c) $C = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; d) $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\qquad B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix};\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}.$$

8. Cho định thức $\Delta=\begin{vmatrix}2 & m+2 & 4\\ m & m & 0\\ 1 & 2 & m\end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta=0$.

9. Cho định thức $\Delta=\begin{vmatrix}2+2m & 1 & 4\\ -3 & -1 & -m\\ 3+m & 1 & m\end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta>0$.

10. Giải phương trình $\begin{vmatrix}x & x & -1 & -1\\ 1 & x^2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$.

11. Giải phương trình $\begin{vmatrix}x & 1 & 0 & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ 1 & 1 & x & 2\\ -1 & -1 & 2 & x\end{vmatrix}=0$.

12. Tìm hạng của ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 6 & 8 & 11\\ 3 & 6 & 9 & 12 & 14\\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20\end{bmatrix}$.

13. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận: $A=\begin{bmatrix}10 & -6\\ 14 & 7\end{bmatrix}-3.\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$.

14. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận: $A=\begin{bmatrix}6 & 5\\ -4 & -7\end{bmatrix}+2.\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$.

15. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$.

16. Cho 2 ma trận: $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 2 & 0\end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $XA=B$.

17. Cho 2 ma trận: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $XA=B$.

18. Cho 2 ma trận: $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $AX=B$.

19. Giải hệ các phương trình sau bằng phương pháp Cramer

a) $\begin{cases}2x-2y-z=-1\\ 2y+z=1\\ -x+y+z=-1\end{cases}$; b) $\begin{cases}3x+2y+z=5\\ 2x+3y+z=1\\ 2x+y+3z=11\end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12. \end{cases}$

20. Giải các phương trình sau bằng phương pháp Gauss

a) $\begin{cases} 1{,}2x - 0{,}8y = 2 \\ -1{,}5x + 0{,}25y = -4. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

21. Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

22. Giải các hệ sau bằng cách tính ma trận nghịch đảo

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 4x + 5y = 3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = -6. \end{cases}$

23. Giải và biện luận theo các tham số các hệ sau

a) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + ay = 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = 4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2. \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ x + cy + c^2 z = c^3. \end{cases}$

CHƯƠNG 2: TOÁN ỨNG DỤNG TRONG NGÀNH ĐIỆN TỬ VÀ CƠ ĐIỆN TỬ

I. Mục tiêu chương

Sinh viên nắm được một số khái niệm về hệ thống số và chuyển đổi hệ thống số từ đó biết áp dụng giải thích được một số ký hiệu và thông số trong ngành điện tử, hiểu khái niệm về đại số Boole, các phép toán về đại số boole, vận dụng kiến thức về đại số boole trong ngành điện tử công nghiệp và cơ điện tử, ...

II . Nội dung chương

Sinh viên hiểu và nắm được kiến thức về các hệ đếm: hệ đếm thập phân, hệ đếm nhị phân, hệ đếm bát phân, hệ đếm số thập lục phân. Từ đó vận dụng vào hệ thống số giải một số bài toán trong chuyên ngành điện tử; Sinh viên nắm được cách chuyển đổi giữa các hệ đếm và từ đó biết áp dụng giải thích được một số ký hiệu trong chuyên ngành điện tử; Sinh viên nắm được các kiến thức về logic mệnh đề, khái niệm về đại số Boole, các phép toán về đại số boole, vận dụng kiến thức về đại số boole trong ngành điện tử công nghiệp và cơ điện tử, ...

BÀI 1: HỆ THỐNG SỐ VÀ ỨNG DỤNG

1.1. Nguyên lý của việc viết hệ cơ số.

Hệ đếm (hoặc *hệ cơ số*) là một hệ thống dùng để thể hiện các chữ số. Đây là một hệ thống các ký hiệu toán học để thể hiện các số của một tập hợp số, bằng cách sử dụng các chữ số hoặc các ký hiệu một cách nhất quán. Hệ đếm là một trong những kiến thức toán học có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực như Vi xử lý, điều khiển logic, lưu trữ dữ liệu,…

1.2. Hệ đếm thập phân

1.2.1. Khái niệm

Hệ thập phân là một hệ đếm dùng vị trí định lượng (*positional numeral system*), ký hiệu là D (10), bao gồm hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm,… Vị trí của một con số ám chỉ một phép nhân (*mũ 10*) với con số ở vị trí đó, và mỗi vị trí có giá trị gấp mười lần vị trí ở bên tay phải của nó.

Về ý nghĩa, hệ đếm thập phân sẽ sử dụng 10 số {0;1;2;3;4;5;6;7;8;9} để biểu diễn. Mọi phần tử của một số số trong hệ thập phân đều nằm trong danh sách 10 con số này.

Số thập phân A được ký hiệu là $A_{(D)}$ (hoặc $A_{(10)}$) (*được tạo bởi k chữ số trước dấu phẩy và m chữ số sau dấu phẩy*) ở hệ cơ số 10 được biểu diễn như sau:

$$A_{(10)} = A_D = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + a_{k-3}10^{k-3} + \ldots + a_0 10^0 + a_{-1}10^{-1} + a_{-2}10^{-2} + \ldots + a_{-m}10^{-m}$$

2.2.2. Các ví dụ.

Ví dụ 1.1. Hệ đếm thập phân được biểu diễn dạng tập hợp các chữ số.

- Số 1250 thì sử dụng bốn số đó là {1; 2; 5; 0}
- Số 2020 thì sử dụng bốn số {2; 0; 2; 0}.

Ví dụ 1.2. Cho số thập phân 1250. Hãy biểu diễn số thập phân 1250 dưới dạng cơ số 10.

$1250_{(10)} = 1.10^3 + 2.10^2 + 5.10^1 + 0.\ 10^0$

Ví dụ 1.3. Cho số thập phân 435,012. Hãy biểu diến số thập phân 435,012 dưới dạng cơ số 10.

$435,012 = 4.10^2 + 3.10^1 + 5.10^0 + 0.10^{-1} + 1.10^{-2} + 2.10^{-3}$

2.3. Hệ đếm nhị phân

2.3.1. Khái niệm

Hệ nhị phân (hay hệ đếm cơ số hai hoặc mã nhị phân) là một hệ đếm dùng hai ký tự để biểu đạt một giá trị số, bằng tổng số các lũy thừa của 2. Hai ký tự đó thường là 0 và 1.

Đặc điểm của hệ đếm cơ số hai là trong cùng một số có hai chữ số giống nhau thì chữ số bên trái có giá trị gấp 2 lần chữ số bên phải.

Ý nghĩa của Hệ cơ số 2:

- Biểu diễn bởi 2 chữ số 0 và 1.
- Số nhị phân có dạng: $A_{(2)} = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0$
- Giá trị nhị phân A (k chữ số 0 và 1) có giá trị thực ở hệ cơ số 10 được tính như sau:

$$A_{(2)} = a_{k-1}2^{k-1} + a_{k-2}2^{k-2} + a_{k-3}2^{k-3} + \ldots + a_0 2^0$$

2.3.2. Các ví dụ.

Ví dụ 1.4. Hãy biểu diễn số nhị phân $101_{(2)}$ có giá trị thực ở hệ cơ số 10.

$101_{(2)} = 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 5_{(10)}$

Ví dụ 1.5. Hãy biểu diễn số nhị phân $001101100_{(2)}$ có giá trị thực ở hệ cơ số 10.

$001101100_{(2)} = 0.2^8 + 0.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$

$= 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 = 64 + 32 + 8 + 4 = 108_{(10)}$

Ví dụ 1.6. Hãy biểu diễn số nhị phân: $001010101111_{(2)}$ sang giá trị thực ở hệ cơ số 10?

$001010101111_{(2)} = 0.2^{11} + 0.2^{10} + 1.2^9 + 0.2^8 + 1.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.1.2^1 + 1.2^0 = 1.2^9 + 1.2^7\ 1.2^5 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.1.2^1 + 1.2^0 = 687_{(10)}$

1.4. Hệ thống số bát phân (Octal)

1.4.1. Khái niệm

Hệ bát phân là hệ đếm cơ số 8, nghĩa là gồm các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tạo nên.

Hệ bát phân ký hiệu là: O là Octal. Viết: $A_{(O)} = A_{(8)}$

Giá trị bát phân $A_{(8)}$ (*gồm k chữ số tạo nên*) sang giá trị thực ở hệ cơ số 10 được tính như sau:

$$A_{(8)} = a_{k-1}8^{k-1} + a_{k-2}8^{k-2} + a_{k-3}8^{k-3} + \ldots + a_0 8^0$$

1.4.2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.7. 346 bát phân, viết tắt là $346_{(O)}$ (*ký hiệu: O là Octal*) có giá trị thực theo hệ thập phân mà ta quen dùng như sau:

$346_{(O)} = 346_{(8)} = 3.8^2 + 4.\ 8^1 + 6.\ 8^0 = 230_{(10)}$

1.5. Hệ thống số thập lục phân

1.5.1. Khái niệm

Hệ thập lục phân (hay gọi hệ Hexa) ra đời để nhằm mục đích mô tả số nhị phân một cách ngắn gọn hơn. Hệ Hexa có cơ số 16 và có 16 ký hiệu. Tuy nhiên khác với hệ bát phân, hệ Hexa không có ký hiệu từ 10 đến 15 thay vào đó là các ký hiệu bằng chữ:

A, B, C, D, E, F (*A*= 10, *B*= 11, *C*= 12, *D*= 13, *E*= 14, *F*= 15)

Như vậy hệ Hexa có 16 ký hiệu để chỉ 16 số của hệ thập phân là:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.

Trong đó: số không là 0, số một là 1, số hai là 2, …, số 9 là 9, số mười là A, số mười một là B, số mười hai là C, số mười ba là D, số mười bốn là E, số mười năm là F.

$A_{(H)} = A_{(16)}$

1.5.2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.8. Hãy viết hệ số Hexa 346_H có giá trị thực sang hệ số cơ số 10 là:

$$346_{(H)} = 3.16^2 + 4.16^1 + 6.16^0 = 768 + 64 + 6 = 838_{(10)}$$

Vậy số 346 hệ 16 bằng số 838 hệ thập phân.

Bảng dưới đây biểu diễn một số giá trị và các hệ của chúng.

Hệ 10 (Thập phân)	Hệ 2 (Nhị phân)	Hệ 8 (Bát phân)	Hệ 16 (Thập lục phân)
0	0_2	0_8	0_{16}
1	1_2	1_8	1_{16}
2	10_2	2_8	2_{16}
3	11_2	3_8	3_{16}
4	100_2	4_8	4_{16}
5	101_2	5_8	5_{16}
6	110_2	6_8	6_{16}
7	111_2	7_8	7_{16}
8	1000_2	10_8	8_{16}
9	1001_2	11_8	9_{16}
10	1010_2	12_8	A_{16}
11	1011_2	13_8	B_{16}
12	1100_2	14_8	C_{16}
13	1101_2	15_8	D_{16}
14	1110_2	16_8	E_{16}
15	1111_2	17_8	F_{16}
16	10000_2	20_8	10_{16}
17	10001_2	21_8	11_{16}
18	10010_2	22_8	12_{16}
19	10011_2	23_8	13_{16}
20	10100_2	24_8	14_{16}
...	...	...	...
105	1101001_2	151_8	69_{16}
106	1101010_2	152_8	$6A_{16}$
107	1101011_2	153_8	$6B_{16}$
108	1101100_2	154_8	$6C_{16}$
109	1101101_2	155_8	$6D_{16}$
110	1101110_2	156_8	$6E_{16}$

1.6. Ứng dụng hệ số đếm vào ngành điện tử.

Ứng dụng hệ đếm nhị phân trong mạch điện tử, trong máy tính rất kho biểu thị, xử lý, lưu trữ các hệ số thập phân nhưng lại làm việc rất dễ dàng và chính xác ở hai trang thái tách biệt. Chẳng hạn: Công tắc điện chỉ có thể đóng hoặc ngắt, các linh kiện điện tử Diode, transistor có thể thông hoặc ngắt tuỳ theo dòng điện điều khiển đầu vào. Vì vậy để biểu diễn hai trạng thái trong kỹ thuật số người ta dùng chữ số 0 và 1 (hệ nhị phân).

Đặc điểm của hệ đếm cơ số hai là trong cùng một số có hai chữ số giống nhau thì chữ số bên trái có giá trị gấp 2 lần chữ số bên phải.

Ví dụ 1.9. $1111111_2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 255_{10}$.

Dãy số nhị phân 11111111 là số 255 trong hệ đếm thập phân (*số 2, số 10 ghi ở dưới chữ số để chỉ ra dãy số đó thuộc hệ đếm nào*).

Từ hệ đếm ta có khái niệm sau:

- **Bit:** Mỗi chữ số trong hệ nhị phân là một Bit. Chữ số đầu tiên bên trái trong dãy các hệ số hai gọi là Bit có nghĩa lớn nhất hay bit có trọng số số lớn nhất (most Significant Bit – MSB), còn Bit cuối cùng bên phải trong dãy gọi là Bit có nghĩa bé nhất hay bit có trọng số nhỏ nhất (Least Significant Bit – LSB). Chẳng hạn như dãy số trên 11111111_2 MSB là 1×2^7, LSB là 1×2^0. Số nhị phân chỉ có Bit 0 và Bit 1, Bit là 0 thì dù ở vị trị nào cũng có giá trị là 0 vì $0 \times 2^n = 0$.
- **Nibble:** 1 nibble = 4 Bit
- **Byte:** 1 Byte = 8 Bit
- **Word:** 1 Word = 16 Bit
- **Double word** (từ kép): 1 Double word = 32 Bit

Trong máy tính ta thường gặp câu hỏi:

Windows 32bit và Window 64bit là gì? Cách phân biệt

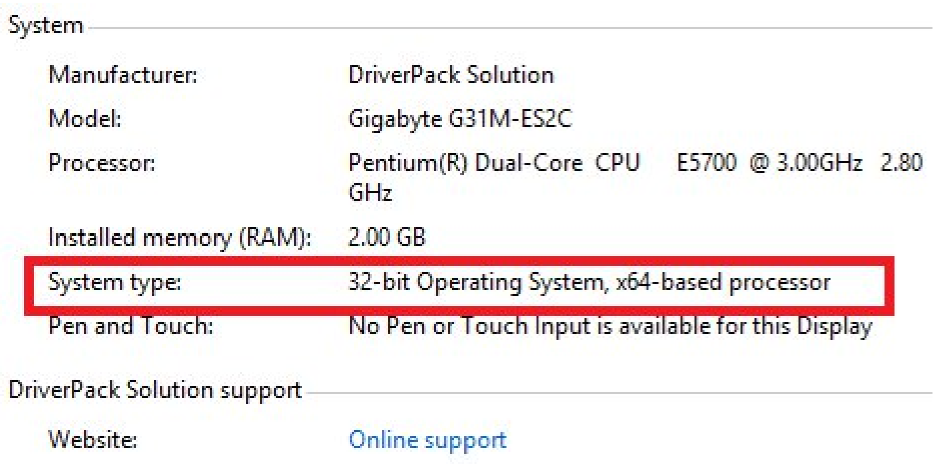
Làm sao biết được máy tính đang dùng windows 32bit hay 64bit? Khi download phần mềm, tôi thường thấy chia ra 2 phiên bản 32bit và 64bit. Vậy phân biệt như thế nào?

Trả lời:

Windows 32bit và Windows 64bit đều là hệ điều hành được cài trên máy tính. Điểm khác giữa 2 HĐH chính là Window 32bit dành cho cấu hình phần cứng nhỏ hơn 4GB Ram còn Windows 64bit có thể nhận hơn 4GB.

Để biết được bạn đang sử dụng HĐH nào, bạn có thể thực hiện theo hướng dẫn sau:

Tại giao diện *Desktop >> Chuột phải Mycomputer >> Properties*. Khi đó bạn sẽ biết HĐH mình đang sử dụng là gì?



Ví dụ 1.10. Muốn trình bày một số nhị phân 4096 ta phải dùng đến 13 Bit (13 con số 0 va 1).

$4029 = 1\ 000\ 000\ 000\ 000_2$

Nhưng khi trình bày một lượng lớn thông tin như trên với hệ sô bát phân thì độ dài chỉ còn 1/3 so với trình bày bằng hệ nhị phân.

BÀI 2: CHUYỂN ĐỔI GIỮA CÁC HỆ ĐẾM VÀ ỨNG DỤNG

2.1. Chuyển đổi giữa các hệ đếm

2.1.1. Chuyển đổi các số nhị phân, bát phân, thập lục bát phân sang hệ thập phân.

Để tính giá trị của số A_n ở hệ cơ số n (*ta chỉ xét n nhận các giá trị 2, 8, 16*) sang hệ thập phân (hệ 10) ta cần thực hiện các bước sau:

- Bước 1: đếm số lượng chữ số có trong số A_n, số này gọi là k.
- Bước 2: đánh chỉ số i của các chữ số theo thứ tự tặng dần từ phải sang trái và bắt đầu từ số 0 đến k - 1.
- Bước 3: tính giá trị thập phân của số theo công thức bên dưới, với a_i là chữ số ở vị trí có chỉ số i của A_n

  $A_n = a_{k-1} * n^{k-1} + a_{k-2} * n^{k-2} + \dots + a_1 * n^1 + a_0 * n^0$

Áp dụng các bước này ta có thể chuyển các số nhị phân, bát phân và thập lục phân sang hệ thập phân.

Ví dụ 2.1: Để chuyển số 11101_2 ở hệ nhị phân (hệ cơ số 2, có n = 2) sang hệ thập phân, ta áp dụng các bước ở trên:

- Bước 1: số 11101_2 có 5 chữ số (1, 1, 1, 0, 1) nên k = 5
- Bước 2: đánh chỉ số của các chữ số

Chữ số	1	1	1	0	1
Chỉ số (i)	4	3	2	1	0

- Bước 3: tính giá trị thập phân bằng công thức bên trên, với n = 2, k = 5

  $\mathbf{11101_2} = 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 + 0.2^4 + 1.2^3$

  $= 1.16 + 1.8 + 1.4 + 0.2 + 1.1 = 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 29.$

  Vậy, số $\mathbf{11101_2}$ hệ nhị phân có giá trị là **29** trong hệ thập phân.

Ví dụ 2.1. Hãy chuyển đổi số nhị phân: 1010101111 sang giá trị thực ở hệ cơ số 10?

Tương tự như trên ta có: $1010101111 = 1.2^9 + 0.2^8 + 1.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.\ 1.2^1 + 1.2^0 = 1.2^9 + 1.2^7\ 1.2^5 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.\ 1.2^1 + 1.2^0 = 687_{(10)}$.

Ví dụ 2.3. Chuyển 7210_8 ở hệ bát phân (hệ cơ số 8, có n = 8) sang hệ thập phân:

- Bước 1: số 7210_8 có 4 chữ số (7, 2, 1, 0) nên k = 4
- Bước 2: đánh chỉ số của các chữ số:

Chữ số	7	2	1	0
Chỉ số (i)	3	2	1	0

- Bước 3: tính giá trị thập phân bằng công thức bên trên, với n = 8, k = 4, ta có:

  $7210_8 = 7.8^3 + 2.\ 8^2 + 1.\ 8^1 + 0.8^0 = 7.512 + 2.64 + 1.8 + 0.1 = 3584 + 128 + 8 + 0 = 3720.$

Vậy số 7210_8 hệ bát phân có giá trị là 3720 trong hệ thập phân.

2.1.2. Chuyển đổi hệ cơ số 10 sang hệ cơ số 2

Quy tắc: Lấy số cần đổ chi cho 2 và ghi nhớ phần dư, tiếp theo lấy thương của phép chia trước chia cho 2 và ghi nhớ phần dư. Làm như vậy cho tới thương bằng 0. Đảo ngược dãy số dư ta được kết quả cần tìm.

Ví dụ 2.4. Chuyển 2371 (hệ thập phân) sang hệ nhị phân?

2371 chia 2 = 1185.5 (1185 -> dư 1)

1185 chia 2 = 592 -> dư 1

(phần nguyên)

592 chia 2 = 296 -> dư 0

296 chia 2 = 148 -> dư 0

148 chia 2 = 74 -> dư 0

74 chia 2 = 37 -> dư 0

37 chia 2 = 18 -> dư 1

18 chia 2 = 9 -> dư 0

9 chia 2 = 4 -> dư 1

4 chia 2 = 2 -> dư 0

2 chia 2 = 1 -> dư 0

1 chia 2 = 0 -> dư 1

Sắp xếp thứ tự số dư từ dưới lên trên: $2371_D = 100101000011_2$

2.1.3. Chuyển hệ số 2 sang hệ số 10

Muốn chuyển đổi cơ số từ hệ nhị phân sang thập phân, ta lấy các chữ số trong phần nguyên của số cần chuyển nhân lần lượt với 2 mũ 0,1,2,3,…tăng dần từ phải qua trái. Còn phần nguyên của số cần chuyển ta sẽ nhân lần lượt với 2 mũ -1, -2, -3, … giảm dần từ phải qua trái. Phần nguyên và phần thập phân được ngăn cách nhau bằng dấu chấm “.”

Ví dụ 2.5. Chuyển $10101100.01101_{(2)}$ sang số thập phân?

1	0	1	0	1	1	0	0	.	0	1	1	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0		-1	-2	-3	-4	-5

Áp dụng như trên ta được:

$10101100.01101_{BIN} = 1x2^7 + 0x2^6 + 1x2^5 + 0x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 +$
$0x2^0 + 0x2^{-1}+1x2^{-2} + 1x2^{-3} +0x2^{-4} + 1x2^{-5} = 128 + 0 + 32 + 0 + 8 + 4+ 0 + 0 + 0 + 0.25 + 0.125$
$+ 0 + 0.0315 = 174.40625$

Vậy $10101100.01101_{BIN} = 174.40625_{DE}$

2.1.4. Chuyển hệ số 10 sang hệ số 8

Cũng giống như cách chuyển đổi cơ số từ thập phân sang nhị phân, để chuyển từ thập phân sang bát phân ta cũng chia số cần chuyển cho 8 được phần dư (giá trị dư từ 1 → 7), sau đó cũng lấy phần nguyên chia tiếp và lấp phần dư, kết quả là phần dư được sắp xếp theo thứ tự từ dưới lên trên.

Ví dụ 2.6. Chuyển số 2764 (*hệ thập phân*) sang hệ bát phân?

2764 chia 8 = 345.5 (345 → dư 4(lấy phần lẻ chia cho 8))

345 chia 8 = 43.125 (43 → dư 1)

43 chia 8 = 5.375 (5 → dư 3)

5 chia 8 = 0 → dư 5

Sắp xếp thứ tự từ dưới lên trên: $2764_D = 5314_O$

2.1.5. Chuyển hệ số 8 sang hệ số 10

Tương tự hệ nhị phân, để chuyển đổi cơ số từ hệ bác phân sang thập phân, ta lấy các chữ số trong phần nguyên của số cần chuyển nhân lần lượt với 8 mũ 0, 1, 2, 3,… tăng dần từ phải qua trái. Còn phần nguyên của số cần chuyển ta sẽ nhân lần lượt với 8 mũ -1, -2, -3, … giảm dần từ phải qua trái.

Ví dụ 2.7. Chuyển 5314.17_O thành hệ thập phân?

5	3	1	4	.	1	7
3	2	1	0		-1	-2

$5314.17_O = 5.8^3 + 3.\ 8^2 + 1.\ 8^1 + 4.\ 8^0 + 1.\ 8^{-1} + 7.\ 8^{-2}$

$= 2560 + 192 + 8 + 4 + 0.125 + 0.109375 = 2764.234375_D$

2.1.6. Chuyển hệ số 2 sang hệ số 8

Để chuyển đổi cơ số từ hệ nhị phân sang bác phân ta gom 3 chữ số của số cần chuyển theo thứ tự lần lượt từ phải sang trái, sau đó sử dụng bảng chuyển đổi hệ đếm để chuyển đổi thành kết quả mong muốn. Nếu thiếu ta thêm số 0 vào phía trước.

Ví dụ 2.8. $100110001011010_2 =$ 100 110 001 011 010

= 4 6 1 3 2

Như vậy: $100110001011010_2 = 46132_O$

2.1.7. Chuyển hệ số 8 sang hệ số 2

Viết số nhị phân 3 Bit ứng với từng con số trong bát phân ở bảng chuyển đổi ta sẽ được kết quả chuyển đổi.

Ví dụ 2.9. Chuyển đổi số 3574_O sang số nhị phân.

Ta có:

3	5	7	4
011	101	111	100

Như vậy: $3574_O = 011\ 101\ 111\ 100_2$

2.1.8. Chuyển hệ số 16 sang hệ số 2

Ta đổ từng con số (từng chữ) hệ Hexa sang nhóm số nhị phân 4 bit tương ứng trong bảng.

Ví dụ 2.10. Chuyển số $A1C_H$ sang hệ nhị phân:

Từ bảng chuyển đổi ta có:

A	1	C
1010	0001	1100

Như vậy $A1C_H = 1010\ 0001\ 1100_2$

2.1.9. Chuyển hệ số 2 sang hệ số 16

Tương tự như trên, muốn chuyển đổi từ hệ nhị phân sang thập lục phân, ta gom 4 chữ số của số cần chuyển theo thứ tự lần lượt từ phải sang trái, sau đó sử dụng bảng 1.

Ví dụ 2.11. $100110001011010_2 =$ 0100 1100 0101 1010 (*nếu các số cuối cùng bên trái không đủ 4 chữ số thì mặc định ta thêm vào trước đó các chữ số 0*)

= 4 C 5 A

Vậy, $100110001011010_2 = 4C5A_H$

2.2. Ứng dụng hệ thống số với các loại mã và phép chuyển đổi trong ngành điện tử và cơ điện tử.

2.2.1. Mã BCD

Trực tiếp liên quan đến mạch số trong ngành điện tử (bao gồm các hệ thống sử dụng số) là các số nhị phân nên mọi thông tin dữ liệu dù là số lượng, các chữ, các dấu, các mệnh lệnh sau cùng cũng phải ở dạng nhị phân thì mạch số mới hiểu ra và xử lý được.

Do đó phải có quy định cách thức mà các số nhị phân được dùng để biểu thị các dữ liệu khác nhau, kết quả là có nhiều mã số (gọi tắt là mã) được dùng. Trước tiên mã số thập phân thông dụng nhất là mã BCD (Binary Coded Decimal: mã số thập phân được mã hóa theo nhị phân). Sự chuyển đổi thập phân sang BCD và ngược lại gọi là mã hoá và sự lặp mã.

2.2.2. Chuyển đổi thập phân sang BCD và ngược lại

Người ta biểu thị các số thập phân từ 0 đến 9 bởi số nhị phân 4 bit có giá trị như bảng dưới đây.

Chúng ta nên chú ý rằng: mã BCD phải được viết đủ 4 bit và sự tương ứng chỉ được áp dụng cho số thập phân từ 0 đến 9, nên số nhị phân từ 1010 (= 10_{10}) đến 1111 (= 15_{10}) của số nhị phân 4 bit không phải là mã BCD.

Thập phân	BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Khi chuyển đổi qua lại giữa thập phân và BCD ta làm như ví dụ minh họa sau đây:

Ví dụ 2.12. Đổi $489_{(10)}$ sang mã BCD

4	8	9	(thập phân)
⇓	⇓	⇓	
0100	1000	1001	(BCD)

Ví dụ 2.13. Đổi 537_{10} sang mã BCD

5	3	7	(thập phân)
⇓	⇓	⇓	
0101	0011	0111	(BCD)

Ví dụ 2.14. Đổi 0011010010010101_2 (BCD) sang số thập phân

0011	0100	1001	0101	(BCD)
⇓	⇓	⇓	⇓	
3	4	9	5	(Thập phân)

2.2.3. So sánh BCD và số nhị phân

Điều quan trọng là phải nhận ra rằng BCD không phải là hệ thống số như hệ thống số thập phân, nhị phân, bát phân và thập lục phân. Thật ra, BCD là hệ thập phân với từng ký số được mã hóa thành giá trị nhị phân tương đương. Cũng phải hiểu rằng một số BCD không phải là số nhị phân quy ước. Mã nhị phân quy ước biểu diễn số thập phân hoàn chỉnh ở dạng nhị phân; Còn mã BCD chỉ chuyển đổi từng ký số thập phân sang số nhị phân tương ứng.

Mã BCD cần nhiều bit hơn để biểu diễn các số thập phân nhiều ký số (2 ký số trở lên. Điều này là do mã BCD không sử dụng tất cả các nhóm 4 bit có thể có, vì vậy có phần kém hiệu quả hơn.

Ưu điểm của mã BCD là dể dàng chuyển đổi từ thập phân sang nhị phân và ngược lại. Chỉ cần nhớ các nhóm mã 4 bit ứng với các ký số thập phân từ 0 đến 9.

Phối hợp các hệ thống số đã trình bày có mối tương quan như bảng sau đây:

Thập phân	Nhị phân	Bát phân	Thập lục phân	BCD
0	0	0	0	0000
1	1	1	1	0001
2	10	2	2	0010
3	11	3	3	0011
4	100	4	4	0100
5	101	5	5	0101
6	110	6	6	0110
7	111	7	7	0111
8	1000	10	8	1000
9	1001	11	9	1001
10	1010	12	A	0001 0000
11	1011	13	B	0001 0001
12	1100	14	C	0001 0010
13	1101	15	D	0001 0011
14	1110	16	E	0001 0100
15	1111	17	F	0001 0101

2.2.4. Mã ASCII

Mã chữ số được sử dụng rộng rãi nhất trong ngành điện tử hiện nay là mã ASCII (American Standard Code for Information Interchange). Mã ASCII là mã 7 bit, nên có 2^7 =

128 nhóm mã, đủ để biểu thị tất cả ký tự của một bàn phím chuẩn cũng như các chức năng điều khiển. Bảng dưới đây minh họa một phần danh sách mã ASCII.

Ký tự	Mã ASCII 7 bit	Bát phân	Thập phân
A	100 0001`	101	41
B	100 0010	102	42
C	100 0011	103	43
D	100 0100	104	44
E	100 0101	105	45
F	100 0110	106	46
G	100 0111	107	47
H	100 1000	110	48
I	100 1001	111	49
J	100 1010	112	4A
K	100 1011	113	4B
L	100 1100	114	4C
M	100 1101	115	4D
N	100 1110	116	4E
O	100 1111	117	4F
P	101 0000	120	50
Q	101 0001	121	51
R	101 0010	122	52
S	101 0011	123	53
T	101 0100	124	54
U	101 0101	125	55
V	101 0110	126	56
W	101 0111	127	57
X	101 1000	130	58
Y	101 1001	131	59
Z	101 1010	132	5A
0	011 0000	060	30
1	011 0001	061	31
2	011 0010	062	32
3	011 0011	063	33
4	011 0100	064	34
5	011 0101	065	35
6	011 0110	066	36
7	011 0111	067	37

8	011 1000	070	30
9	011 1001	071	39
<ký tự riêng>	010 0000	040	20
.	010 1110	056	2E
(	010 1000	050	28
+	010 1011	053	2B
$	010 0100	044	24
*	010 1010	052	2A
)	010 1001	051	29
_	010 1101	055	2D
/	010 1111	057	2F
,	010 1100	054	2C
=	010 1101	075	2D
<RETURN>	000 1101	015	0D
<LINEFEED>	000 1010	012	0A

2.2.5. Mã thừa 3 (Excess – 3 code)

Bảng dưới đây cho biết mã số thừa 3 ứng với số thập phân từ 0 đến 9. Để chuyển đổi số thập phân sang mã thứa 3 trước tiên ta thêm 3 vào số thập phân đó rồi chuyển sang nhị phân bình thường.

Thập phân	BCD	Thừa 3
0	0000	0011
1	0001	0100
2	0010	0101
3	0011	0110
4	0100	0111
5	0101	1000
6	0110	1001
7	0111	1010
8	1000	1011
9	1001	1100

Ví dụ 2.15. 2_{10} g $2 + 3 = 5_{10} = 0101$

5_{10} g $5 + 3 = 8_{10} = 1000$

Do cách viết số thập phân ra mã thừa 3 tương tự như cách viết số thập phân ra mã BCD đã nói ở trước, nên người ta có thể hiểu mã thừa 3 là một dạng của mã BCD. Để dể phân biệt mã BCD đã nói đến ở phần trước được gọi là mã BCD 8421.

2.2.6. Mã Gray

Bảng dưới đây trình bày mã số Gray cùng với mã số nhị phân và thập phân từ 0 đến 15. Mã Gray được chọn sao cho chỉ thay đổi một vị trí bit giữa hai mã kế nhau.

Thập phân	Nhị phân	Gray
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

2.2.5 Thêm bit chẳn lẻ để phát hiện sai

Tín hiệu biểu thị số nhị phân truyền từ mạch điện tử này sang mạch điện tử khác, và nhất là truyền đi xa bị méo dạng và nhiễm nhiễu khiến số nhị phân nhận được có thể sai so với số cần truyền. Để khắc phục hiện tượng này người ta thêm vào mã ASCII 7 bit một bit chẳn lẻ (Parity bit) ở vị trí có nghĩa cao nhất (bên trái) để có dữ liệu 8 bit (1 bit chẵn lẻ, 7 bit dữ liệu gốc). Ở cách dùng lẻ (Odd parity) thì bit parity thay đổi để làm cho tổng số bít 1 trong byte là lẻ.

Ví dụ 2.16.

Dữ liệu 7 bit gốc	Bit parity	Dữ liệu 8 bit
ASCII A : 100 0001	1	1100 0001
ASCII B : 100 0101	0	0100 0101
ASCII 1 : 011 0001	0	0011 0001
ASCII 9 : 011 1001	1	1011 1001

Ở cách dùng chẵn (Even parity) thì bit parity thay đổi để cho tổng số bit 1 trong byte là chẵn. chẳng hạn:

Dữ liệu 7 bit gốc	Bit parity	Dữ liệu 8 bit
ASCII A : 100 0001	0	0100 0001
ASCII E : 100 0101	1	1100 0101

Bằng các thuật toán, các mạch số sẽ đếm tổng số bit cùng loại trong byte nhận được để xử lý, nếu dữ liệu xử lý không khớp với qui ước về bit chẵn lẻ, số đó sẽ được mạch nhận biết là số bị sai.

Bài 3: ĐẠI SỐ BOOLE VÀ ỨNG DỤNG

3.1. Logic mênh đề

3.1.1. Mệnh đề

Trong toán học những khẳng định có giá trị hoặc đúng hoặc sai ta gọi những khẳng định đó là mệnh đề.

- Một mệnh đề đúng có giá trị chân lý là 1.
- Một mệnh đề sai có giá trị chân lý là 0.

Ví dụ 3.1. a) Mệnh đề "*2 là số chẵn*" có giá trị là 1

b) Mệnh đề "*Mặt trời quay quanh trái đất*" có giá trị là 0

- Tính đúng sai có thể chưa xác định hoặc không biết nhưng chắc chắn hoặc đúng hoặc sai cũng là mệnh đề. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai hoặc không thể khẳng định được tính đúng sai của nó.

Ví dụ 3.2. Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết tính đúng sai của nó.

a. Không được đi lối này!

b. 7 là số nguyên tố.

c. Bây giờ là mấy giờ?

d. Tôi và bạn cùng đi học.

e. Phương trình $x^2 + 2015x - 2016 = 0$ vô nghiệm.

Hướng dẫn: Câu a, c không phải là mệnh đề.

Câu b là mệnh đề đúng, câu e là mệnh đề sai, câu d là mệnh đề chưa xác định được tính đúng sai.

3.1.2. Kiến thức cơ bản về logic mệnh đề

a. Các phép toán logic cơ bản

- Các mệnh đề ký hiệu bởi các chữ cái in hoa: *A, B, C, X, Y, Z,…* chúng được gọi là các biến mệnh đề sơ cấp.

- Các mệnh đề sử dụng các liên từ: "*không*", "*và*", "*hoặc*", "*nếu …. thì…..*" liên kết các mệnh đề sơ cấp ta gọi là mệnh đề phức hợp. Ứng với mỗi liên từ chúng ta có một phép toán logic.

- *Phép phủ định:* Phủ định của mệnh đề *A*, ký hiệu là $\overline{A}$. Bảng giá trị chân lý:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

- *Phép hội:* Là phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp *A* và *B* một mệnh đề mới là "A và B". Ký hiệu là $A \wedge B$ (hoặc viết gọn là *AB*).

Bảng giá trị chân lý:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- *Phép tuyển:* Là phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp *A* và *B* một mệnh đề mới "A hoặc B". Ký hiệu là: $A \vee B$ (hoặc viết gọn là $A + B$).

Bảng giá trị chân lý:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- *Phép kéo theo* ("*Nếu ... thì ...*"): Là phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp A và B một mệnh đề mới "Nếu A thì B", ký hiệu là $A \Rightarrow B$ (đọc là nếu *A* thì *B*).

Bảng giá trị chân lý:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- *Phép tương đương* (*còn gọi là đẳng giá):* Là phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp *A* và *B* một mệnh đề mới là "nếu A thì B" và "Nếu B thì A", ký hiệu là $A \Leftrightarrow B$.

Bảng giá trị chân lý:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

b. Công thức logic mệnh đề

Từ các biến mệnh đề sơ cấp, nhờ các phép toán logic cơ bản ta lập được các mệnh đề phức hợp, chúng được gọi là các công thức. Ta thường ký hiệu công thức bởi các chữ cái *F, G, H, …* Chẳng hạn công thức sau:

+ $F = ((A \cup B) \Rightarrow C)$.

+ $G = (\mathrm{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C))$.

+ $H = ((A \cup B) \cup B)$.

c. Công thức tương đương, công thức đồng nhất đúng, đồng nhất sai

Hai công thức *F* và *G* được gọi là tương đương logic nếu chúng cùng nhận giá trị chân lý giống nhau với mọi hệ thống của các biến mệnh đề sơ cấp.

Ký hiệu: $F = G$.

Công thức *F* được gọi là đồng nhất đúng (hằng đúng) nếu nó nhận giá trị là 1 với mọi hệ thống giá trị của các biến mệnh đề sơ cấp, ký hiệu: $\mathrm{F} \equiv 1$.

Công thức F được gọi là đồng nhất sai (hằng sai) nếu nó nhận giá trị là 0 với mọi hệ thống giá trị của các biến mệnh đề sơ cấp, ký hiệu: $F \equiv 0$.

Ví dụ 3.3. Chứng minh rằng:

$$F = G. \text{ Với } F = ((A \cup B) \Rightarrow C),\ G = (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)).$$

Giải: Để chứng minh hai công thức logic tương đương ta lập bảng giá trị chân lý.

A	B	C	$A \cup B$	$B \Rightarrow C$	$((A \cup B) \Rightarrow C)$	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Từ bảng chân lý ta suy ra: $F = G$

Ví dụ 3.4. Chứng minh các công thức logic sau là tương đương:

a). $\overline{\overline{A}} = A$. b). $\overline{A \vee B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. c). $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$.

d). $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$. e). $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \cup (B \Rightarrow A)$.

Giải: Ta sử dụng phương pháp lập bảng giá trị chân lý. Chẳng hạn chứng minh câu *b*, ta có bảng giá trị chân lý sau:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Từ bảng chân lý ta suy ra: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Ví dụ 3.5. Chứng minh các công thức sau là đồng nhất đúng:

a). $F = (A \cup \overline{A})$ b). $F = ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}))$

c). $G = (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ d). $F = (A \cup B \Rightarrow A)$

Giải: Để chứng minh các công thức logic là đồng nhất đúng hoặc đồng nhất sai ta sử dụng bảng giá trị chân lý, chẳng hạn ta chứng minh câu c), ta lập bảng chân lý:

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Từ bảng chân lý ta suy ra: $G \equiv 1$

* ***Quy ước bỏ dấu ngoặc:*** Thứ tự thực hiện các phép toán logic là: Phép hội, phép tuyển, phép kéo theo và phép tương đương.

Nếu có dấu phủ định trên công thức thì có thể bỏ các dấu ngoặc ở hai đầu công thức. Chẳng hạn: $\overline{(A \Rightarrow (B \wedge C))} = \overline{A \Rightarrow B \wedge C}$.

3.2. Logic điều khiển

3.2.1. logic trạng thái

- Trong cuộc sống hàng ngày những sự vật đập vào mắt chúng ta như: "*Có/không*"; "*trong/đục*"; "*thiếu/đủ*"; "*còn/hết*"; "*nhanh/chậm*";... hai trạng thái này đối lập với nhau hoàn toàn.

- Trong kỹ thuật (*đặc biệt kỹ thuật điện – điều khiển*) khái niệm về logic hai trạng thái: "*Đóng/cắt*"; "*bật/tắt*"; "*start/stop*";...

- Trong toán học để lượng hoá hai trạng thái đối lập của sự vật hay hiện tượng người ta dùng hai giá trị "0&1" gọi là hai giá trị logic. Các nhà khoa học chỉ xây dựng các "*hàm*" & "*biến*" trên hai giá trị "0 & 1" này. Các hàm và biến đó gọi là hàm và biến logic. Cơ sở để tính toán các hàm và biến này gọi là đại số logic (*hay còn gọi là đại số Boole*)

3.2.2. Các hàm cơ bản của đại số logic

- Hàm logic một biến:

Hàm	Bảng chân lý			Thuật toán logic
	X	1	0	
Hàm không	Y_0	0	0	$Y_0 = 0$
				$Y_0 = x\overline{x}$
Hàm lặp	Y_1	1	0	Y_1
Hàm đảo	Y_2	0	1	$Y_2 = \overline{x}$
Hàm đơn vị	Y_3	1	1	$Y_3 = 1$
				$Y_3 = x + \overline{x}$

- Hàm logic hai biến: $y = f(x_1, x_2)$

Tên hàm	Bảng chân lý					Thuật toán logic
	X_1	0	0	1	1	
	X_2	0	1	0	1	
Hàm không	Y_0	0	0	0	0	$Y_0 = \overline{x_1}x_2 + \overline{x_2}x_1$
Hàm và	Y_1	0	0	0	1	$Y_1 = x_1 . x_2$
Hàm hoặc	Y_7	0	1	1	1	$Y_7 = x_1 + x_2$
Hàm cấm x_1	Y_2	0	0	1	0	$Y_2 = \overline{x_2}x_1$
Hàm lặp x_1	Y_3	0	0	1	1	$Y_3 = x_1$
Hàm đảo x_1	Y_{10}	1	1	0	0	$Y_{10} = \overline{x_1}$
Hàm kéo theo x_1	Y_{11}	1	0	1	1	$Y_{11} = \overline{x_2} + x_1$
Hàm đơn vị x_1	Y_{15}	1	1	1	1	$Y_{15} = x_1 + \overline{x_1}$

Ví dụ 3.6. Trong mạch điện tử có 3 công tắc A, B, C. Hệ thống mạch muốn đèn chiếu sáng khi công tắc A, B, C đều hở hoặc A đóng, B và C đều hở hoặc A hở B đóng C hở.

Với giá trị hàm y đã cho ở trên ta lập bảng chân lý sau:

Công tắc đèn			Đèn
A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	1 sáng
0	0	1	0
0	1	0	1 sáng
0	1	1	0
1	0	0	1 sáng
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

3.3. Đại số Boole và ứng dụng

3.3.1. Khái niệm về đại số Boole

Tập hợp khác rỗng S cùng với các phép toán ký hiệu nhân (**.**), cộng (+), lấy bù (**-**) được gọi là một đại số Boole nếu các tiên đề sau đây được thoả mãn với mọi a, b, c ∈ S.

i). Tính giao hoán: a) a.b = b.a,

b) a + b = b + a.

ii). Tính kết hợp: a) (a.b).c =a.(b.c),

b) (a + b) + c = a + (b + c).

iii). Tính phân phối: a) a.(b + c) = a.b + a.c,

b) a + (b.c) = (a + b).(a + c).

iv). Tồn tại phần tử trung hoà: Tồn tại hai phần tử khác nhau của S, ký hiệu là 1 và 0 sao cho: a) a.1 = 1.a = a,

b) a + 0 = 0 + a = a.

Trong đó 1 gọi là phần tử trung hoà của phép, và 0 gọi là phần tử trung hoà của phép +.

v). Tồn tại phần tử bù: Với mọi a ∈ S, tồn tại duy nhất phần tử a' ∈ S sao cho:

a) a.a' = a'.a = 0,

b) a + a' = a' + a = 1

trong đó: a' gọi là phần tử bù của a.

Chẳng hạn: 1). Đại số lôgic là một đại số boole, t rong đó S là tập hợp các mệnh đề, các phép toán: hội, tuyển, phủ định tương ứng với **.** , +, **'**, các hằng đ (đúng), s (sai) tương ứng với các phần tử trung hoà 1, 0

2). Đại số tập hợp là một đại số Boole, trong đó S là tập hợp *P*(X) gồm các tập con của tập khác rỗng X, các phép toán: ∩ (giao), ∪ (hợp), − (bù) tương ứng với **.** , +, **'**, các tập X, Ø tương ứng với các phần tử trung hoà 1, 0.

3). Cho B = {0,1}, các phép toán **.** , +, **'** trên B được định nghĩa như sau:

1.1 = 1,	1 + 1 = 1,	1' = 0,	
1.0 = 0,	1 + 0 = 1,	0' = 1.	(1)
0.1 = 0,	0 + 1 = 1,		
0.0 = 0,	0 + 0 = 0,		

Khi đó B là một đại số Boole. Đây cũng chính là đại số lôgic, trong đó 1, 0 tương ứng với đ (đúng), s (sai). Mỗi phần tử 0,1 của B gọi là một bit. Ta thường viết $\overline{x}$ thay cho *x'*.

Tổng quát, gọi B^n là tập hợp các xâu n bit (xâu nhị phân độ dài n). Ta định nghĩa tích, tổng của hai chuỗi và bù của một chuỗi theo từng bit một như trong Bảng 1, mà thường được gọi là các phép toán AND-bit, OR-bit, NOT-bit. B^n với các phép toán này tạo thành một đại số Boole.

Chú ý: Trước hết cần lưu ý điều quan trọng sau đây: các tiên đề của đại số Boole được xếp theo từng cặp a) và b). Từ mỗi tiên đề a), nếu ta thay **.** bởi +, thay + bởi **.**, thay 1 bởi 0 và thay 0 bởi 1 thì ta được tiên đề b) tương ứng.

Ta gọi cặp tiên đề a), b) là đối ngẫu của nhau. Do đó nếu ta chứng minh được một định lý trong đại số Boole thì ta có ngay một định lý khác, đối ngẫu của nó, bằng cách thay **.** và 1 tương ứng bởi + và 0 (và ngược lại).

3.3.2. Các phép toán về đại số Boole

Bởi vì các đại lượng chỉ có hai trạng thái nên đại số Boole rất khác đại số thường và dễ tính toán hơn. Ở đại số Boole không có phân số, số thập phân, số ảo, số phức, căn số… mà chỉ thực hiện chủ yếu 3 phép tính toán cơ bản sau:

+ Phép toán "cộng", ký hiệu: OR hay "+"

Phép OR là phép toán cộng giữa hai biểu thức *A* và *B*. Ký hiệu là: A OR B (hoặc *A* + *B*).

Phét toán A OR B được thực hiện dựa trên nguyên tắc:

- Kết quả quả trả về là 0 (FALSE) khi và chỉ khi tất cả các giá trị đầu vào là 0 (FALSE).
- Kết quả trả về là 1 (TRUE) khi có bất kỳ một giá trị nhập vào là 1 (TRUE)

Bảng giá trị của phép cộng:

Input		*Output*
A	*B*	A OR B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Chẳng hạn:

A	1	0	0	1	1	0	1	0
B	1	1	0	0	1	0	0	1
A OR B hay A + B	1	1	0	1	1	0	1	1

+ Phép toán "nhân", ký hiệu: AND hay "."

Phép AND là phét toán nhân giữa hai biểu thức *A* và *B*. Ký hiệu là: A AND B (hoặc *A*.*B*).

Phét toán A AND B được thực hiện dựa trên nguyên tắc:

- Kết quả quả trả về là 1 (TRUE) khi và chỉ khi tất cả các giá trị đầu vào là 1 (TRUE).
- Kết quả trả về là 0 (FALSE) khi có bất kỳ một giá trị nhập vào là 0 (FALSE)

Bảng giá trị của phép nhân:

Input		*Output*
A	*B*	A AND B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Chẳng hạn:

A	1	0	0	1	1	0	1	0
B	1	1	0	0	1	0	0	1
A AND B hay A.B	1	0	0	0	1	0	0	0

+ Phép toán "trừ" (hay gọi phép bù; phép toán một ngôi), ký hiệu: NOT (hoặc "-")

Phép NOT A gọi là phần bù của A, ký hiệu: $\overline{A}$.

Phép toán NOT A được thực hiện dựa trên nguyên tắc:

- Kết quả quả trả về là 1 (FALSE) nếu giá trị đầu vào là 0 (FALSE)..
- Kết quả trả về là 0 (FALSE) nếu giá trị đầu vào là 1 (TRUE).

Bảng giá trị của phép NOT

Input	*Output*
A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Ví dụ 3.7.

A	1	0	0	1	1	0	1	0
$\overline{A}$	0	1	1	0	0	1	0	1

Chú ý: Độ ưu tiên của các phép toán:

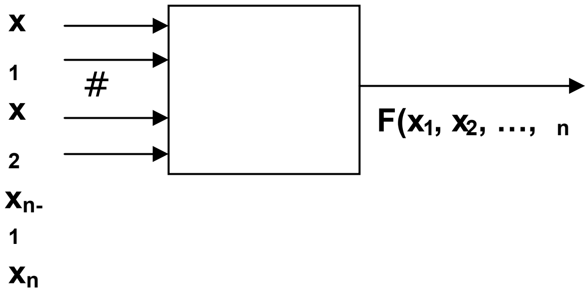
- Biểu thức được tính từ trái sang phải.
- Biểu thức trong ngoặc đơn được đánh giá trước.
- Các phép toàn bù (NOT) được ưu tiên tiếp theo.
- Tiếp theo là các phép toán "." (AND)
- Cuối cùng là phép toán "+" (OR).

Chẳng hạn:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	A AND B	A OR B	A XOB B
1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0

3.3.3. Thiết lập mạch logic từ biểu thức logic

a). Cổng logic:

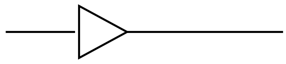


Xét một thiết bị như hình trên, có một số đường vào (dẫn tín hiệu vào) và chỉ có một đường ra (phát tín hiệu ra). Giả sử các tín hiệu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ta gọi là đầu vào hay input) cũng như tín hiệu ra F (đầu ra hay output) đều chỉ có hai trạng thái khác nhau, tức là mang một bit thông tin, mà ta ký hiệu là 0 và 1. Ta gọi một thiết bị với các đầu vào và đầu ra mang giá trị 0, 1 như vậy là một mạchlôgic.

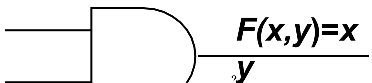
Đầu ra của một mạch lôgic là một hàm Boole F của các đầu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ta nói mạch lôgic trong hình trên thực hiện hàm F.

Các mạch lôgic được tạo thành từ một số mạch cơ sở, gọi là cổng lôgic. Các cổng lôgic sau đây thực hiện các hàm phủ định, hội và tuyển.

1. **Cổng NOT:** Cổng NOT thực hiện hàm phủ định. Cổng chỉ có một đầu vào. Đầu ra *F(x)* là phủ định của đầu vào *x*.



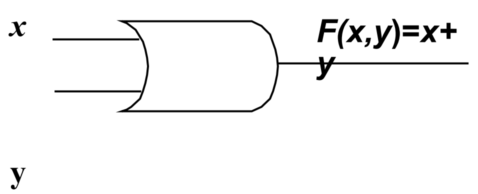
2. **Cổng AND:** Thực hiện hàm hội. Đầu ra F(x,y) là hội (tích) của đầu vào.

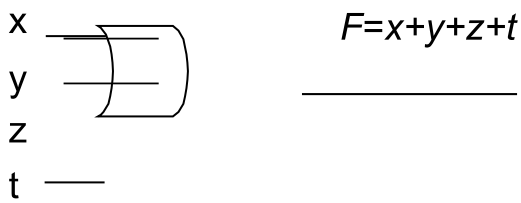


Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010110 qua cổng AND cho 101000100

3. **Cổng OR:** Cổng OR thực hiện hàm tuyển (tổng). Đầu ra *F(x,y)* là tuyển (tổng) của các đầu vào.

$$(x,y) = x + y = \begin{cases} 1, & khi\ x = 1\ hay\ y = 1 \\ 0, & khi\ x = y = 0 \end{cases}$$





Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010100 qua cổng OR cho 111011101.

Đầu ra của một mạch lôgic là một hàm Boole F của các đầu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ta nói mạch lôgic trong hình trên thực hiện hàm F.

Các mạch lôgic được tạo thành từ một số mạch cơ sở, gọi là cổng lôgic. Các cổng lôgic sau đây thực hiện các hàm phủ định, hội và tuyển.

b). Mạch logic:

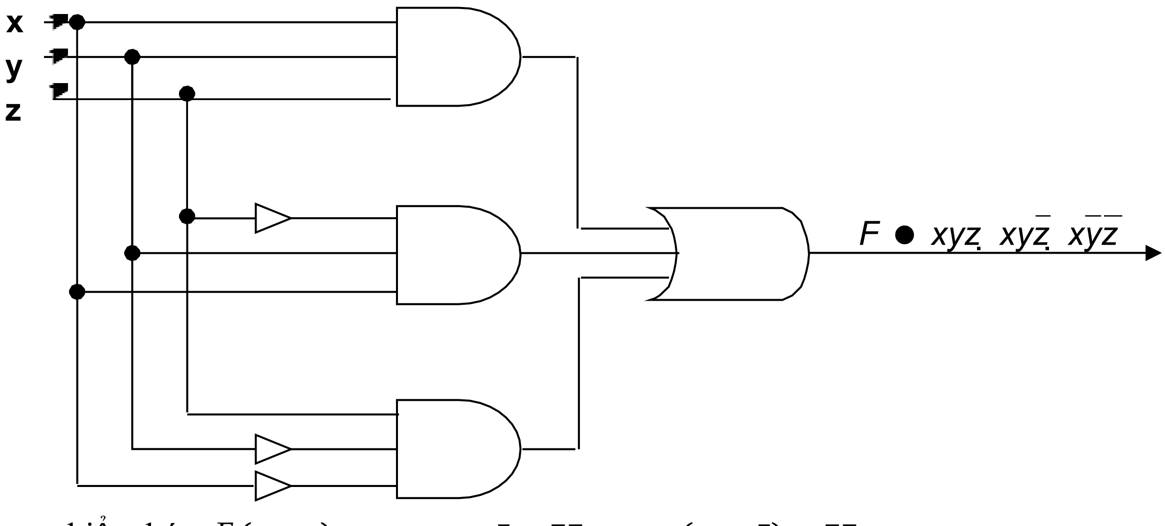
Tổ hợp các cổng: Các cổng lôgic có thể lắp ghép để được những mạch lôgic thực hiện các hàm Boole phức tạp hơn. Như ta đã biết rằng một hàm Boole bất kỳ có thể biểu diễn bằng một biểu thức chỉ chứa các phép −, ., +. Từ đó suy ra rằng có thể lắp ghép thích hợp các cổng NOT, AND, OR để được một mạch lôgic thực hiện một hàm Boole bất kỳ.

Ví dụ 3.8: Xây dựng một mạch lôgic thực hiện hàm Boole cho bởi bảng sau:

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Theo bảng này, hàm *F(x,y,z)* có dạng tổng (tuyển) chuẩn tắc hoàn toàn là:

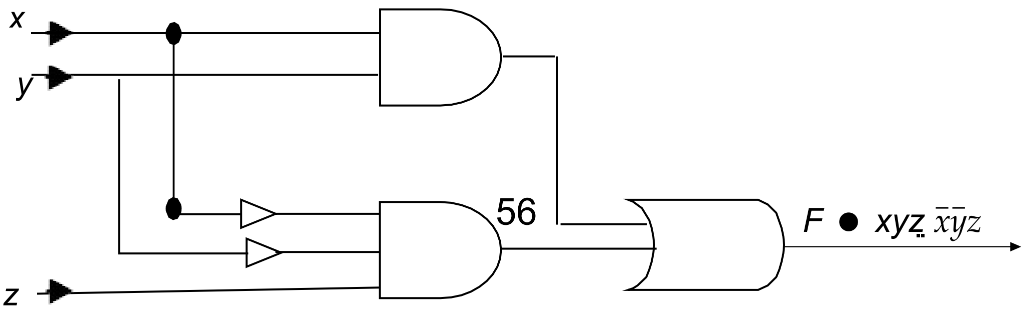
$$F(x,y,z) = xyz + zy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$$



Rút gọn biểu thức $F(x,y,z) = xyz + zy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z = xy(z + \bar{z}) + \bar{x}\bar{y}z$

$$= xy + \bar{x}\bar{y}z$$

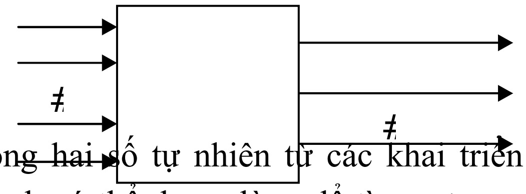
Hình dưới đây cho ta mạch lôgic thực hiện hàm $F(x,y,z) = xy + \bar{x}\bar{y}z$



Hai mạch lôgic trong hai hình trên thực hiện cùng một hàm Boole, ta nói đó là hai mạch lôgic tương đương, nhưng mạch lôgic thứ hai đơn giản hơn.

Mạch cộng:

Nhiều bài toán đòi hỏi phải xây dựng những mạch lôgic có nhiều đường ra, cho các đầu ra $F_1, F_2, ..., F_k$ là các hàm Boole của các đầu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$.



Chẳng hạn, ta xét phép cộng hai số tự nhiên từ các khai triển nhị phân của chúng. Trước hết, ta sẽ xây dựng một mạch có thể được dùng để tìm x + y với x, y là hai số 1-bit. Đầu vào mạch này sẽ là x và y. Đầu ra sẽ là một số 2-bit $\overline{cs}$, trong đó s là bit tổng và c là bit nhớ.

0 + 0 = 00

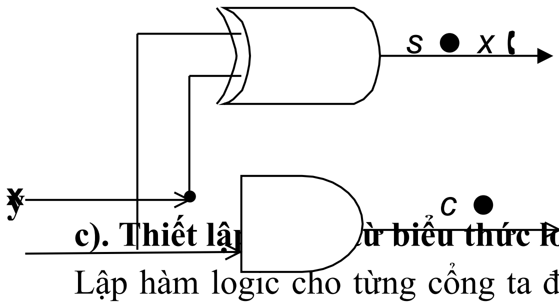
0 + 1 = 01

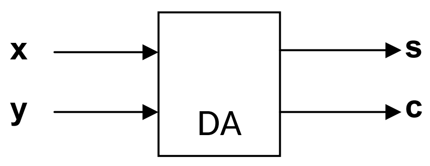
1 + 0 = 01

1 + 1 = 10

x	y	c	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Từ bản trên, ta thấy ngay $s = x \oplus y$, c = xy. Ta vẽ được mạch thực hiện hai hàm $s = x \oplus y$, c = xy như dưới đây. Mạch này gọi là mạch cộng hai số 1-bit hay mạch cộng bán phần, ký hiệu là DA.

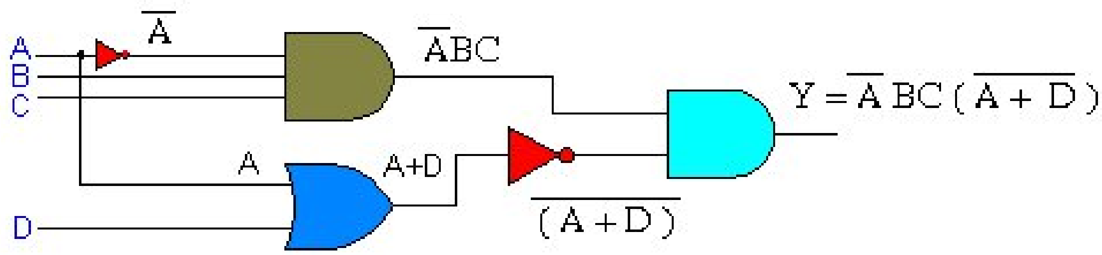




c). Thiết lập mạch từ biểu thức logic

Lập hàm logic cho từng cổng ta đã biết cho bất cứ kết nối nào của các cổng. Từ biểu thức biết được ta có thể tính logic ra tương ứng với mỗt tổ hợp logic vào, và lập bảng sự thật của các ngõ vào (biến số) và ngõ ra (hàm). Để tính logic ra tương ứng với một tổ hợp logic và ta thường là tính thẳng trên mạch.

Ví dụ 3.9. Cho biểu thức logic $Y = \overline{A}BC(\overline{A + D})$. Hãy thiết lập mạch của từ biểu thức Y.

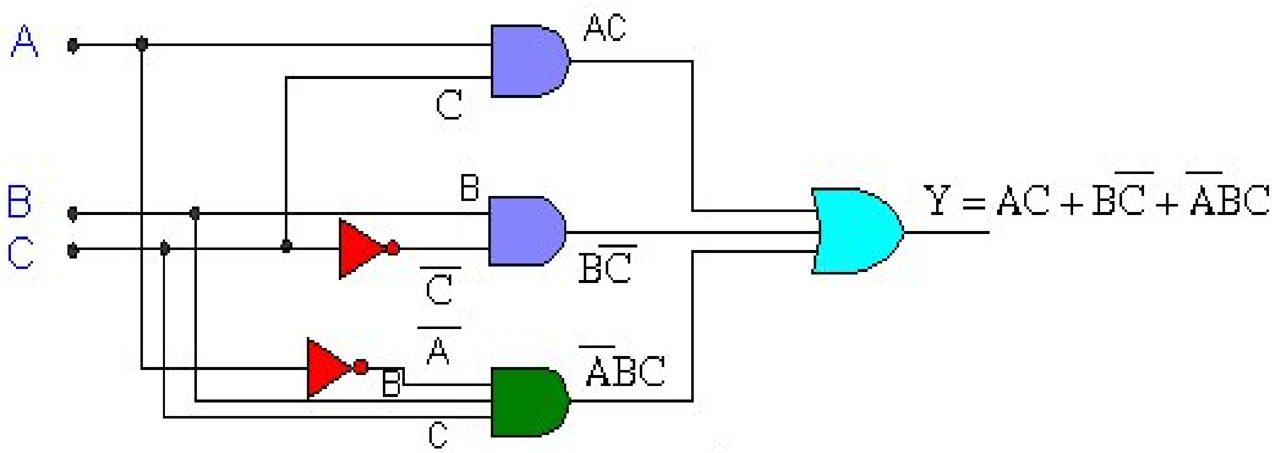


Với ví dụ với mạch trên với 4 ngõ vào nên ta có tổng cộng 16 tổ hợp vào nên ta phải tính 16 trạng thái ra khác nhau mới lập được bảng sự thật (Truth Table).

3.3.4. Thực hiện mạch từ biểu thức logic

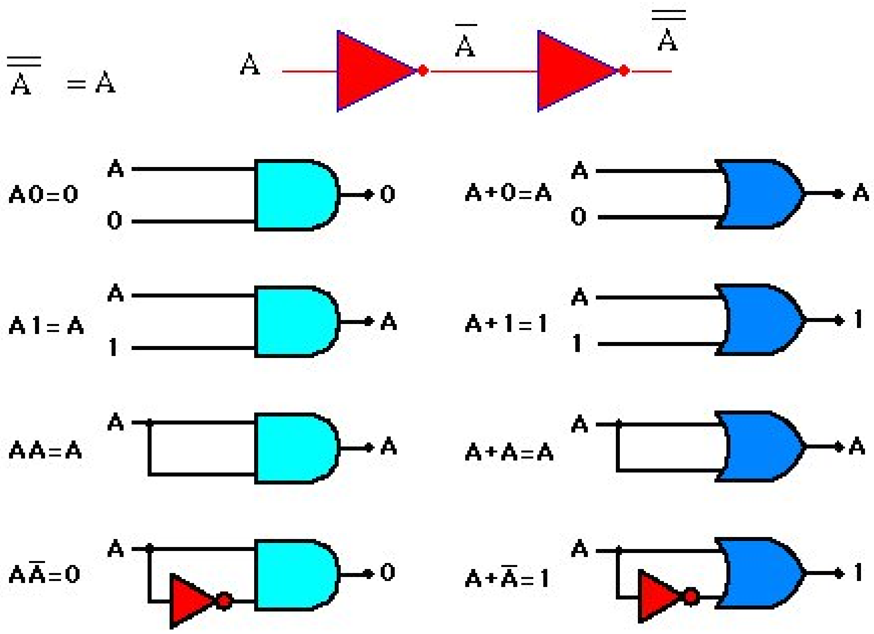
Ngược lại với viết biểu thức từ mạch là thực hiện mạch từ biểu thức logic.

Chẳng hạn cho biểu thức logic cho là: $Y = AC + B\overline{C} + \overline{A}BC$ nhìn vào biểu thức ta thấy ngõ ra là OR của 3 số hạng nên ta thực hiện mỗi số hạng Y trước. Với số hạng đầu ta dùng AND, số hạng thứ 2 ta ĐẢO C sau đó AND với B, số hạng thứ 3 ta cũng thực hiện tương tự , sau cùng ta OR 3 ba số hạng lại.



3.3.5. Định lý đại số Boole và ứng dụng

- **Một số biến số:**



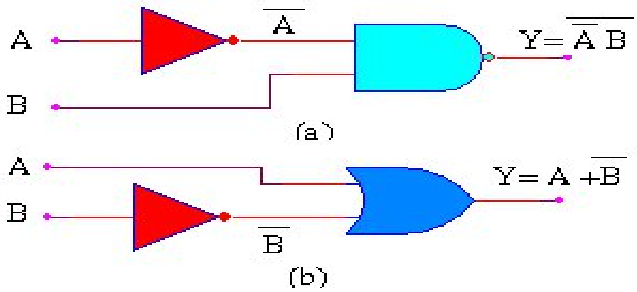
- **Giao hoán:** AB = BA; A + B = B + A

- **Phối hợp:** ABC = A(BC) = (AB)C
  A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)
- **Phân phối:** A(B + C) = AB + AC
  (A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD
- **Một số đẳng thức hữu dụng:**
  A(A + B) = A
  A + AB = A
  $AB + A\overline{B} = A$
  $A + \overline{A}B = A + B$
  $A(\overline{A} + B) = AB$
  $(A + B)(A + \overline{B}) = A$
  (A + B)(A + C) = A + BC
  $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$
  $(A + B)(\overline{A} + C)(B + C) = (A + B)(\overline{A} + C)$
- **Định lý De Morgan**
  $\overline{ABC\ldots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ldots$
  $\overline{A + B + C + \ldots} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\ldots$

Các định lý của đại số Boole được chứng minh hay kiểm chứng bằng nhiều cách. Các cách chứng minh hay kiểm chứng này tương đối đơn giản, người đọc có thể tự chứng minh hay kiểm chứng.

Ví dụ 3.10. Thiết kế mạch dùng hai cổng logic thỏa bảng sự thật sau đây

Vào		Ra
A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1



<u>Giải:</u> Vì ngõ ra bằng 0 chỉ một trường hợp nên ta viết hệ thức logic ở trường hợp này. Y = 0 khi A = 0 và B = 1 nên $\overline{Y} = \overline{A}B$. Để có Y ta đảo $\overline{Y}$, nên $Y = \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{A}B}$. Mạch thực hiện cổng NOT để tạo ra A đảo, tiếp theo là cổng NAND của $\overline{A}$ và B (hình 1.30a)

Mặt khác ta có thể dựa vào bảng sự thật để viết hàm logic cho Y và kết quả là: $Y = \overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + AB$ sử dụng các định lý của đại số Boole ta biến đổi và được kết quả cuối cùng là $Y = A + \overline{B}$(hình 1.30b).

Ví dụ 3.11. Chứng tỏ $(A + B)(\overline{A} + \overline{C}) = \overline{A}B + A\overline{C}$.

<u>Giải:</u> $(A + B)(\overline{A} + \overline{C}) = A\overline{A} + A\overline{C} + B\overline{A} + B\overline{C}$

$= 0 + A\overline{C} + \overline{A}B + B\overline{C} = A\overline{C} + \overline{A}B + B\overline{C}$

Vận dụng các công thức ta dể dang biến đổi được:

$(A + B)(\overline{A} + \overline{C}) = A\overline{C} + \overline{A}B + B\overline{C} = A\overline{C} + \overline{A}B$

Một cách chứng minh khác là ta có thể dùng bảng sự thật để chứng minh biểu thức trên.

3.3.6. Sự chuyển đổi giữa các loại cổng logic

4.4. Ứng dụng đại số Boole rút gọn biểu thức logic

Các định lý Boole giúp đơn giản các biểu thức logic. Việc đơn giản là cần thiết để mạch thiết kế thực hiện đơn giản và kinh tế hơn. Rút gọn biểu thức là vận dụng các định lý từ hàm một biến cho đến hàm nhiều biến và những đẳng thức hữu dụng. Đặt biệt là hai định lý De Morgan giúp ích cho rất nhiều trong việc rút gọn biểu thức logic và cũng là công cụ chính để chuyển đổi các dạng mạch. Để việc rút gọn biểu thức logic và chuyển đổi mạch dể dàng cần phải nắm vững các định lý của đại số Boole và phải thông thạo chuyển đổi giữa các cổng logic.

Ví dụ 3.12. Rút gọn các biểu thức sau:

a). $A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}$

b). $ABC + ABD + AB$

c). $AB(\overline{A} + C)$

d). $\overline{\overline{A} + \overline{\overline{BC}}}.\overline{A}$

Giải: a). $A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} = A\overline{B}\left(C + \overline{C}\right) = A\overline{B}.1 = A\overline{B}$

b). $ABC + ABD + AB = AB(C + D + 1) = AB.1 = AB$

c). $AB\left(\overline{A} + C\right) = A\overline{B}B + ABC = 0 + ABC = ABC$

d). $\overline{\overline{A} + \overline{\overline{BC}}}.\overline{A} = \left(\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{\overline{BC}}}\right).A = A.BC.\overline{A} = 0.$

Ví dụ 3.13. Đơn giản hàm $Y = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C$

Giải: $Y = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C = AB\left(C + \overline{C}\right) + A\overline{B}C$

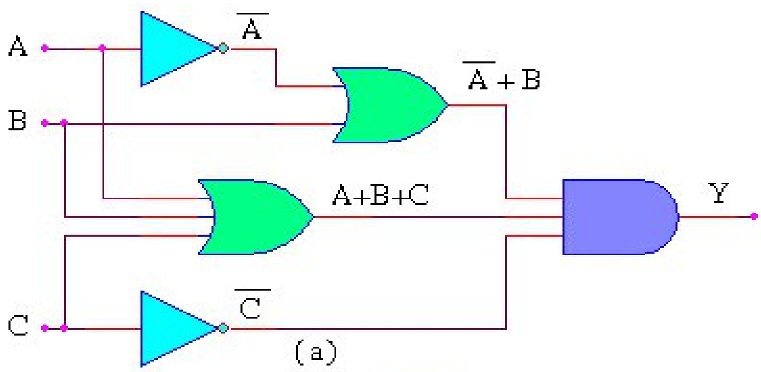
$= AB.1 + A\overline{B}C = A(B + \overline{B}C)$

$= A(B + C)$

Ngoài việc rút gọn biểu thức logic bằng đại số boole, còn sử dụng đại số boole để đơn giản mạch logic. Để đơn giản mạch logic ta làm các bước sau:

- Từ mạch logic xác định biểu thức cho ngõ ra của mạch
- Sau khi xác định được hàm ngõ ra, tiến hành rút gọn biểu thức bằng cách dùng các định lý của đại số boole, đặc biệt là sử dụng định lý De Morgan.
- Sau khi được biểu thức mới, chúng ta có được mạch logic mới tương đương với mạch logic đã cho.

Ví dụ 3.14. Đơn giản mạch ở hình (a).



(a)

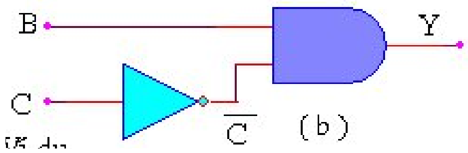
Giải: Trước tiên ta viết biểu thức logic cho ngõ ra:

$Y = \left(\overline{A} + B\right)(A + B + C).\overline{C}$

Rút gọn biểu thức ta được:

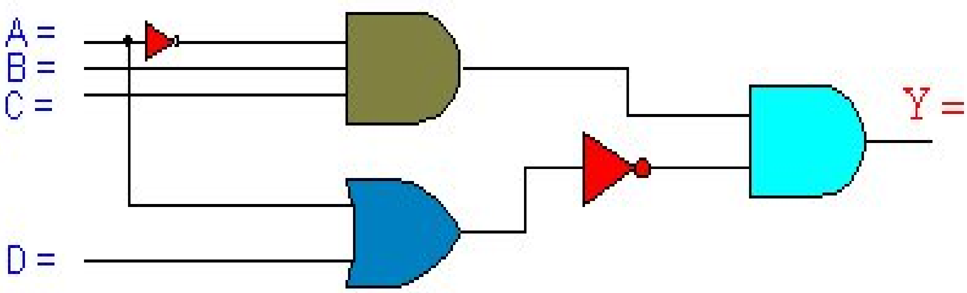
$$Y = \left(\overline{A} + B\right)(A + B + C).\overline{C} = \overline{A}A\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + BB\overline{C} + BC\overline{C}$$
$$= 0 + \overline{A}B\overline{C} + 0 + AB\overline{C} + B\overline{C} + 0$$
$$= B\overline{C}\left(\overline{A} + A + 1\right) = B\overline{C}$$

Từ biểu thức vừa rút gọn được ta thành lập được mạch logic mới như hình (b).



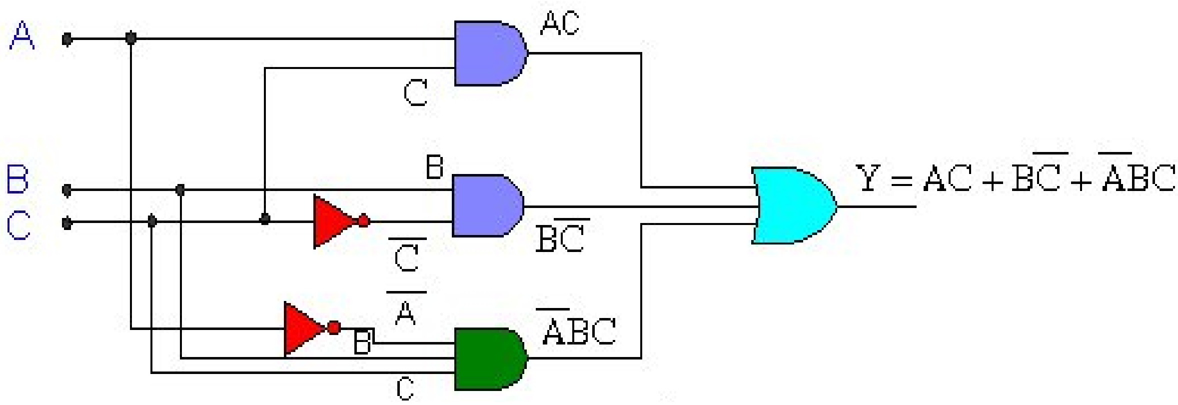
Ứng dụng thiết lập biểu thức logic: Lập hàm logic cho từng cổng ta đã biết cho bất cứ kết nối nào của các cổng. Từ biểu thức biết được ta có thể tính logic ra tương ứng với mỗt tổ hợp logic vào, và lập bảng sự thật của các ngõ vào (biến số) và ngõ ra (hàm). Để tính logic ra tương ứng với một tổ hợp logic và ta thường là tính thẳng trên mạch.

Ví dụ 3.15. Hãy viết hàm logic tạo bởi mạch sau:



Dựa vào mạch trên ta có hàm logic được xác định như sau:

Ứng dụng thực hiện mạch từ biểu thức logic: Ngược lại với viết biểu thức từ mạch là thực hiện mạch từ biểu thức logic. Ví dụ cho biểu thức logic là: $Y = AC + B\overline{C} + \overline{A}BC$. Nhìn vào biểu thức ta thấy ngõ ra là OR của 3 số hạng nên ta thực hiện mỗi số hạng Y trước. Với số hạng đầu ta dùng AND, số hạng thứ 2 ta ĐẢO C sau đó AND với B, số hạng thứ 3 ta cũng thực hiện tương tự , sau cùng ta OR 3 ba số hạng lại.



BÀI TẬP

1. Cho S là tập hợp các ước nguyên dương của 70, với các phép toán •, + và ’ được định nghĩa trên S như sau:

a • b = UCLN(a, b), a + b = BCNN(a, b), a’ = 70/a.

Chứng tỏ rằng S cùng với các phép toán •, + và ’ lập thành một đại số Boole.

2. Chứng minh rằng:

a) (a+b)**.**(a+b’) = a;

b) (a**.**b)+(a’**.**c) = (a+c)**.**(a’+b).

3. Cho các hàm Boole F_1, F_2, F_3 xác định bởi bảng sau:

x	y	z	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Vẽ mạch thực hiện các hàm Boole này.

4. Hãy dùng các cổng NAND để xây dựng các mạch với các đầu ra như sau:

a) x b) xy c) $x+y$ d) $x \oplus y$.

5. Hãy dùng các cổng NOR để xây dựng các mạch với các đầu ra được cho trong Bài tập **4**.

6. Hãy dùng các cổng NAND để dựng mạch cộng bán phần.

7. Hãy dùng các cổng NOR để dựng mạch cộng bán phần.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Mạnh Hùng (2011), *Giáo trình toán học cao cấp (dành cho sinh viên các trường Cao đẳng kỹ thuật)*, Nhà xuất bản Lao động – Xã hội, Hà Nội.

[2]. Lê Hồng Sơn, Ngô Tất Hoạt, Nguyễn Thị Thu Nhung, Lê Thị Huệ, Trần Hải Yến, Ngô Thị Huyền (2016), *Giáo trình Toán cao cấp 1,* Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vinh.

[3]. Nguyễn Đức Thành (2011), *Giáo trình bài tập Toán cao cấp (dành cho sinh viên các trường Cao đẳng kỹ thuật)*, Nhà xuất bản Lao động – Xã hội, Hà Nội.

[4]. Nguyễn Đức Thành (2019), *Giáo trình Toán cơ sở (dành cho sinh viên các trường Cao đẳng kỹ thuật)*, Nhà xuất bản Lao động – Xã hội, Hà Nội.

[5]. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Lê Trọng Vinh, Dương Thủy Vỹ (2005), *Giáo trình Toán học cao cấp,* Tập 1,2, Nhà xuất bản Giáo dục.

[6]. Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2000), *Toán học cao cấp* Tập 1, 2, 3, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

[7]. P.E Đankô, A.G. Pôpôp, I. Ia Côgiepnhicova, 1983, *Bài tập toán học cao cấp,* Tập 1, 2 – bản dịch tiếng Việt, Nhà xuất bản Mir Maxcơva.